Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 2019

Hörsaalübung 4 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Differenzierbarkeit, konforme Abbildungen

17.05.2019

Differenzierbarkeit

Für die gesamte HÜ: Wenn nicht ausdrücklich anders erklärt:

G: Gebiet in $\mathbb{C}$, also offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$i^2 = -1, \quad z = x + iy = re^{i\phi}, \qquad x, y, r, \phi \in \mathbb{R}$

$f : G \to \mathbb{C},\ f : z \mapsto f(z) = w = u + iv = \rho e^{i\alpha}, \qquad u, v, \rho, \alpha \in \mathbb{R}$.

Also $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Komplexe Differenzierbarkeit: f heißt in z_0 komplex diff.bar, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

analytisch/ holomorph/ regulär in G : in ganz G komplex diff.bar.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-DGL'n) :

Seien u und v in einer Umgebung von z_0 partiell diffbar nach x und y. Dann:

f in z_0 kompl. diffbar $\Longleftrightarrow$ in z_0 gelten die (CR-DGL'n)

$$\boxed{u_x = v_y\,, \quad v_x = -u_y}$$

Dann gilt

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(z_0) + i \cdot v_x(z_0)}$$

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit= hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen (= Drehstreckungen)

In $\mathbb{C}$: $f(z) \;=\; u(x,y) \,+\, i\,v(x,y)$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \qquad \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Longrightarrow J\tilde{f}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Definitionen:

Winkeltreue einer Funktion f: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Winkel zwischen Kurven, die sich in z_0
schneiden bleiben bei der Abbildung
$z \mapsto w = f(z)$
(in Größe und Orientierung) erhalten.

Längentreue: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Alle von z_0 *ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung*
$z \mapsto w = f(z)$ *um den gleichen Faktor* $|f'(z_0)|$ *gestreckt.*

Konforme Abbildung:

f *heißt konform, wenn* f *winkel- und längentreu ist.*

Einige Eigenschaften holomorpher Funktionen:

- f ist in jedem Punkt z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

- u und v sind $C^\infty-$ Funktionen.

- u und v sind harmonische Funktionen. Das heißt
$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad \Delta v = 0$$

- Ist u harmonisch ($\Delta u = 0$), so gibt es v, so dass $f = u + iv$ holomorph ist. v heißt **konjugiert harmonische Funktion**.
$$\nabla v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$
Konstruiere Potential wie in Analysis III.

Vorlesung: Polynome, $\exp$, deren Kompositionen und Umkehrungen sind überall in $\mathbb{C}$ wo sie definiert sind, komplex diffbar.

$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Beispiele:

Beispiel 1) In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist f komplex diff.bar?

- **A)** $\quad f(z) = \cos(\mathsf{Re}\,(z))$

$u =$ $\qquad v =$

$u_x =$

Die Funktion ist nur für $z = x + iy$ mit $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ komplex differenzierbar.

- **B)**

$$
\begin{aligned}
f(z) \; = \; & \mathsf{Re}\,(z) \cdot \big((\mathsf{Re}\,(z))^2 - 3(\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big) \\
& + \; i \cdot \big(\mathsf{Im}\,(z) \cdot \big(3(\mathsf{Re}\,(z))^2 - (\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big)\big) \\
& =
\end{aligned}
$$

Cauchy Riemannschen Dgl'n: $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$

$u_x =$

$-u_y =$

- **C)** $f(z) := \bar{z}^3\,, \quad \text{arg}\,(z) \in \,]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\,],\, |z| > 0.$

Polarkoordinaten wären angenehmer. Also rechnet man mittels Kettenregel die CR-DGL'n um in

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

$$\boxed{u_r \;=\; \frac{1}{r}\,v_\phi\,, \qquad v_r \;=\; -\,\frac{1}{r}\,u_\phi}$$

Damit ergibt sich für

$$f(z) \;=\; \bar{z}^3 \;=\; (re^{-i\phi})^3 = r^3 \cdot e^{-i3\phi}, \qquad r \neq 0$$

Also $f(z) \;=\; u + iv = \; r^3 \cdot (\cos(-3\phi) \;+\; i \cdot \sin(-3\phi))$

Faustregel: explizites Auftauchen von Im , Re , $\bar{z}$, $|z|$, $\arg(z)$ verträgt sich schlecht mit Diffbarkeit.

Widerspricht das nicht Beispiel B?

Beispiel 2) Bestimmen Sie alle analytischen Funktionen $f = u + iv$ mit

$$u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = x^2 + 2xy - y^2$$

Also: bestimmen Sie alle konjugiert harmonischen Fkt'n v zu u

$$u_x \;=\; 2x + 2y \;\overset{!}{=}\; v_y \iff v(x,y) \;=$$

$$-u_y \;=\; -(2x - 2y) \;\overset{!}{=}\; v_x \;=$$

$$\iff v(x,y) \;=\; 2xy + y^2 - x^2 + C$$

$$f(x+iy) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) + iC$$

$C = ?$

Bemerkung: Auch bei diesem Typ Aufgabe können Polarkoordinaten geeigneter sein:

$r \cdot u_r = v_\varphi$ und $r \cdot v_r = -u_\varphi$

Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion

$$u\,:\,\mathbb{R}^2\,\to\,\mathbb{R},\quad u(x,y):=\,e^{3x}\sin(3y)\,+\,e^{-2y}\cos(2x)\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h.

ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v.
D.h.: Bestimmen Sie v so, dass
$f(z) = f(x+iy) = \, u(x+iy) + iv(x+iy)$
holomorph wird.

Konforme Abbildungen

- f heißt **Winkeltreue:** Für alle $z_0 \in G$ gilt:

  Winkel zwischen Kurven, die sich in z_0 schneiden bleiben bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ (in Größe und Orientierung) erhalten.

  f heißt **Längentreue:** Für alle $z_0 \in G$ gilt:

  Alle von z_0 ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ um den gleichen Faktor $|f'(z_0)|$ gestreckt.

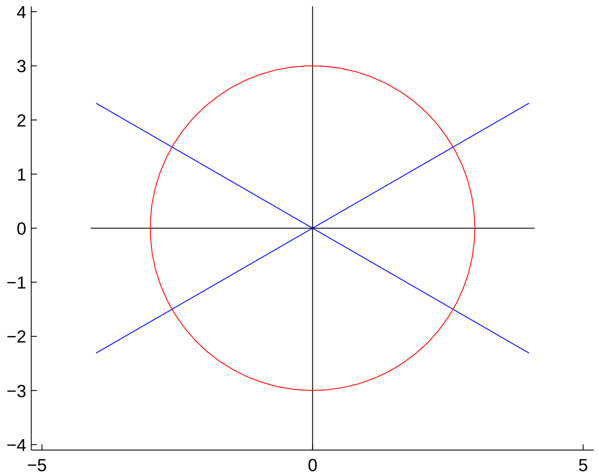
  Konforme Abbildung:

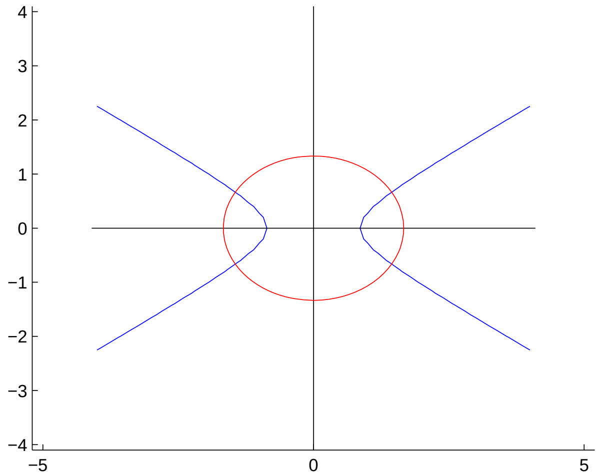
  f heißt konform, wenn f winkel- und längentreu ist.

- Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt $z \in D(f)$ mit $f'(z) \neq 0$ winkeltreu.
- Ist $f : z \to f(z) = u(z) + iv(z)$ in z_0 konform und u und v in einer Umgebung von z_0 stetig diffbar, dann ist f diffbar in z_0 mit $f'(z) \neq 0$.

Beispiel 4: $f(z) = z^2$

Beispiel 5: Die Joukowski Funktion $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$





Beispiel 6: Das Parallelogrammen P mit den Ecken $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,2)$, $(2,2)$ kann im $\mathbb{R}^2$ mittels einer affin–linearen Abbildung auf jedes andere vorgegebene Parallelogrammen $\tilde{P}$ abgebildet werden.

Kann man in $\mathbb{C}$ mittels einer

– affin linearen

– konformen

– differenzierbaren

Abbildung f das Parallelogrammen P auf ein Quadrat mit Seitenlänge 3 abbilden?.

Beispiel 7: Die implizit gegebene Kurve (Ellipse)

$$\Gamma_1 : \qquad (\pi \cdot \mathsf{Re}\,(z))^2 + (6 \cdot \mathsf{Im}\,(z))^2 = 2\pi^2$$

und die Kurve (Gerade)

$$\Gamma_2(t) = t + i \cdot \frac{\pi}{6},\ t \in \mathbb{R}^+$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = 1 + i \cdot \frac{\pi}{6}$.

Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch Anwendung der Funktion $f : z \mapsto f(z) = e^z$ gedreht?

Zu H2c: Definition der konformen Abbildung genau lesen!

Zu H2d: Das Problem ist die Bijektivität!

Mögliche Vorgehensweise fü die Zusatzaufgabe: