Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

SoSe 2019

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 3 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Möbius Transformaion (und Joukowski-Funktion)

03.05.2019

Möbius-Transformation

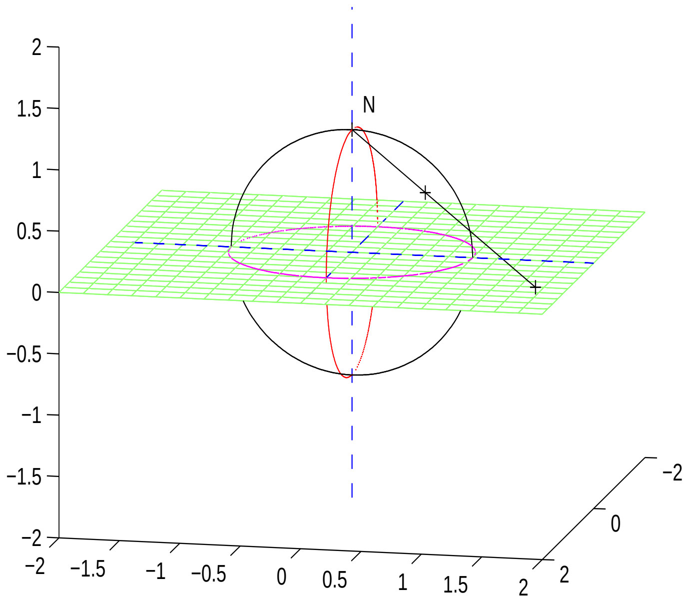
$$T: \; z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

Zur Untersuchung dieser Funktionen betrachte die stereographische Projektion:

$S_2 :=$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3 =$ Riemannsche Zahlenkugel

$$S_2 := X = (X_1,\, X_2,\, X_3,\,) \in \mathbb{R}^3 : \; \|X\|_2 \, = \, 1$$

wird auf die Ebene $(X_1,\, X_2)$ abgebildet und diese wiederum wird mit $\mathbb{C}^* \; := \mathbb{C} \cup \infty$ identifiziert.

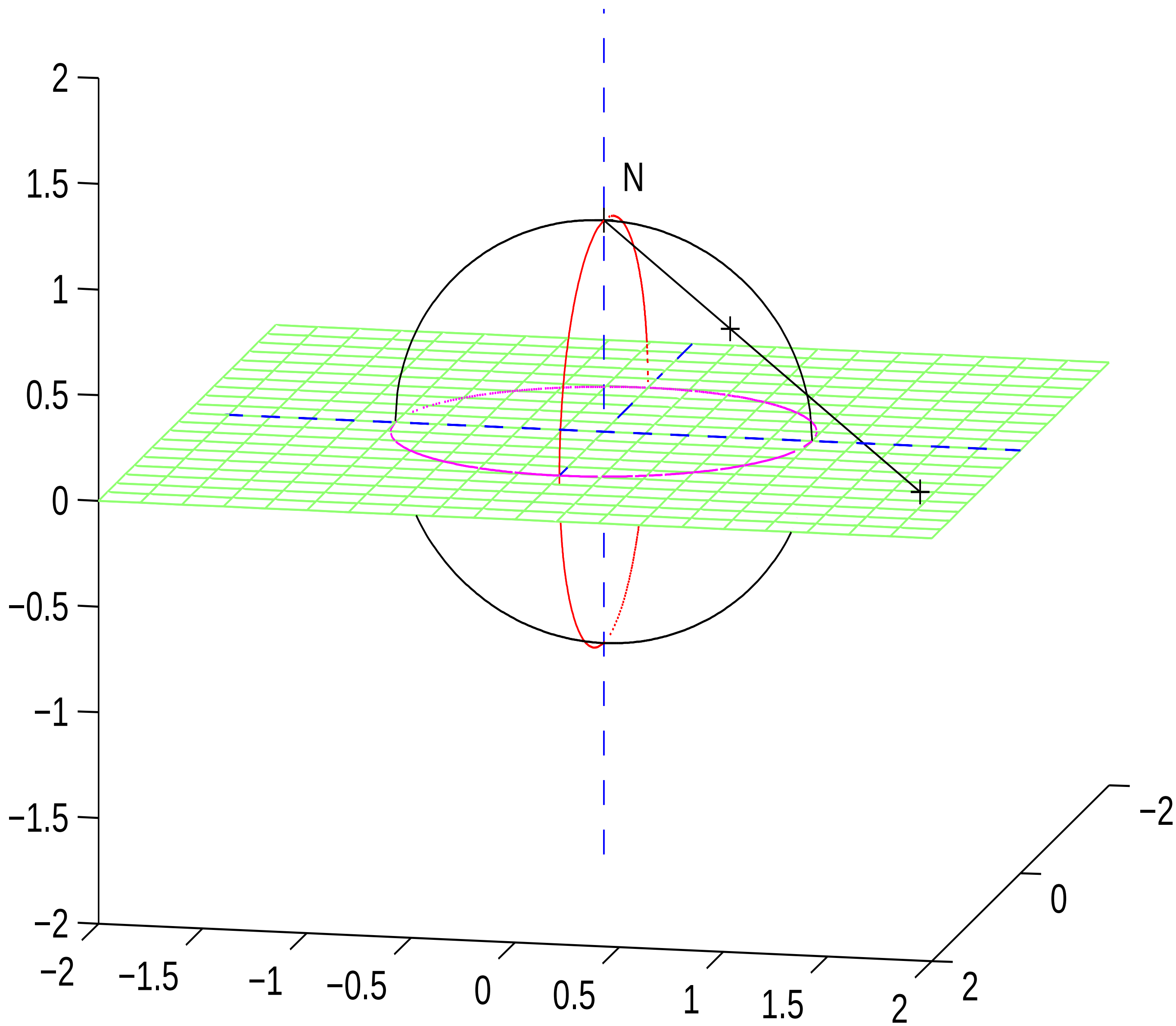


Nordpol der Kugel $=: N = (0,0,1)^T$

Abbildungsvorschrift: bestimme den Schnittpunkt $(x,y)^T$ der Geraden durch X und N mit der X_1, X_2 −Ebene bzw. mit C^*.

Bijektive Abbildung $P: S_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$

Durch Festlegung $P(N) =: \infty$, bijektive Abbildung $P: S_2 \to \mathbb{C}^*$.


N
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−2
0
2

Gerade in $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der durch N geht!
Ebene durch N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

Kreis in $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der nicht durch N geht!
Kegel mit Spitze in N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

„Kreis“ := Verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade

Verallgemeinerte Kreise werden auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.

Rechenvorschrift: s. Vorlesung Seite 84, 85

Zurück zur Möbius Transformation

Möbius-Transformation

$$T:\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty, \qquad T(\infty) := \frac{a}{c}, \qquad T(-\frac{d}{c}) := \infty.$

Verallgemeinerte Kreise : Kreise oder Geraden

Kreistreue:

$-\frac{d}{c} \in$,,Kreis“ $\Longrightarrow T($,,Kreis“$) =$ Gerade

$-\frac{d}{c} \notin$,,Kreis“ $\Longrightarrow T($,,Kreis“$) =$ echter Kreis

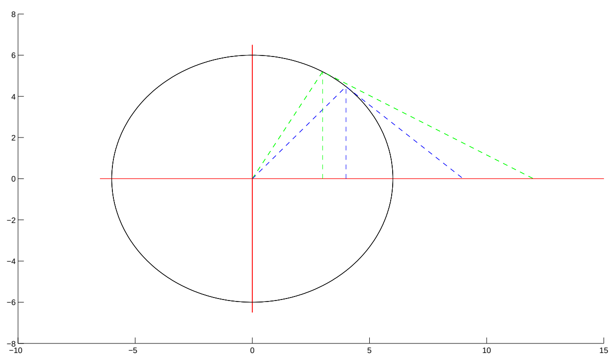
Kreissymmetrie : Symmetrien bzgl. ,,Kreise“ bleiben erhalten

Symmetrie bzgl. einer Gerade : klar (Spiegelung)

z, z' symmetrisch bzgl. Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M $\Longleftrightarrow$

z, z' liegen auf einem von M ausgehenden Strahl und

$|z - M| \cdot |z' - M| \; = \; R^2 \Longleftrightarrow (z - M) \cdot (\bar{z}' - \bar{M}) \;\; = \;\; R^2$



Mittelpunkt M von Kreis K und ∞ sind symmetr. bzgl. K

Denn: $\qquad z \to \infty \quad \Longrightarrow \quad |z - M| \to \infty \Longrightarrow \quad |z' - M| \to 0$

Für jede Möbius-Transformation T gilt daher:

$T(M), T(\infty)$ **sind symmetrisch bzgl. Bild„kreis“** $T(K)$**.**

Dreipunktrelation:

Nach Vorlesung gilt für $w = T(z)$ und drei Punktepaaren

$w_j = T(z_j)$, $j =\ 1, 2, 3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Beispiel: Gesucht Möbius Transformation mit

$$T(1) = -i, \qquad T(i) = 0, \qquad T(2i) = \tfrac{1}{3}\,.$$

$$\frac{w -\ (-i)}{w -\ 0} : \frac{\frac{1}{3} -\ (-i)}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{z -\ 1}{z -\ i} : \frac{2i -\ 1}{2i -\ i}$$

Auflösen nach w ergibt: $T(z)\ =\ \dfrac{z - i}{z + i}$.

Beispiel:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit

$T(2i) = 0$, $T(-2i) = \infty$, $T(0) = 1$.

b) Welches sind die Bilder von

(i) $i\mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{R}$,

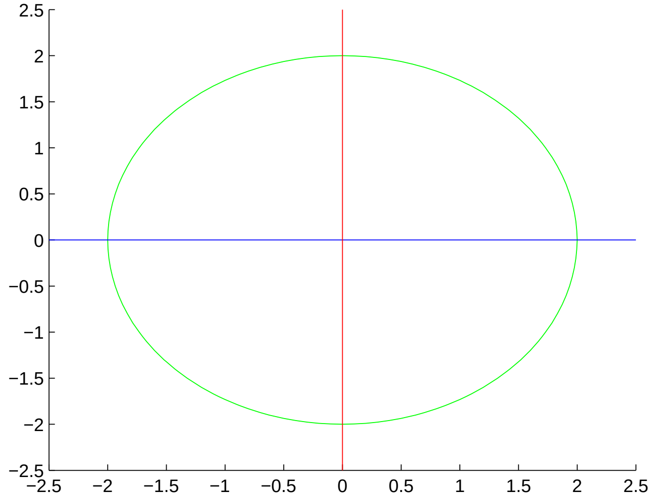
(iii) $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

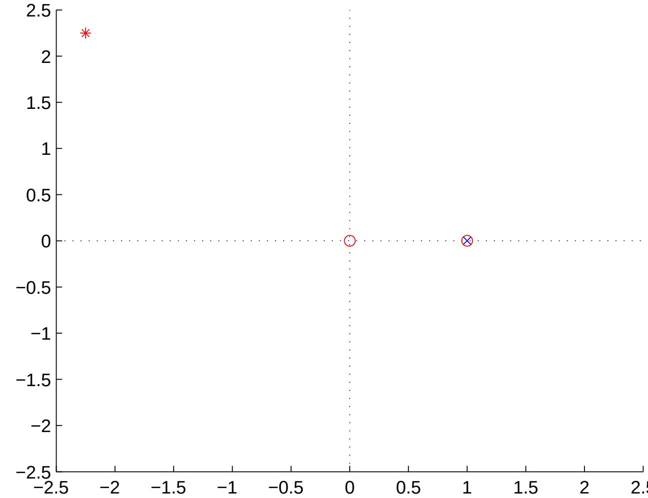
(iv) $g := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z = -1\}$

(v) $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$

(vi) $|z| \leq 8$?

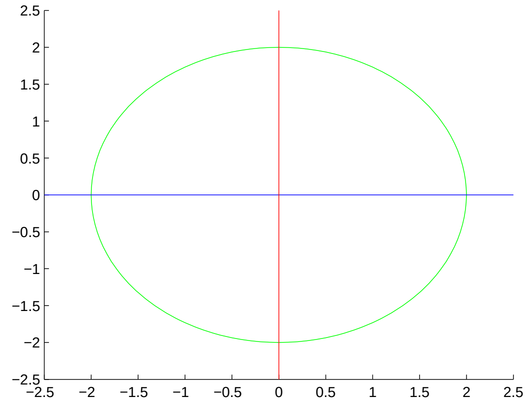
a) $$T(z) = \frac{2i - z}{2i + z}\,.$$

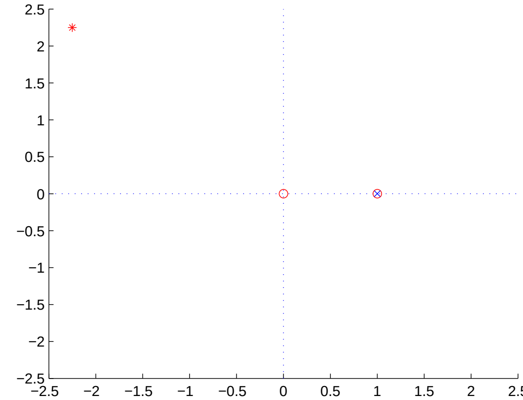




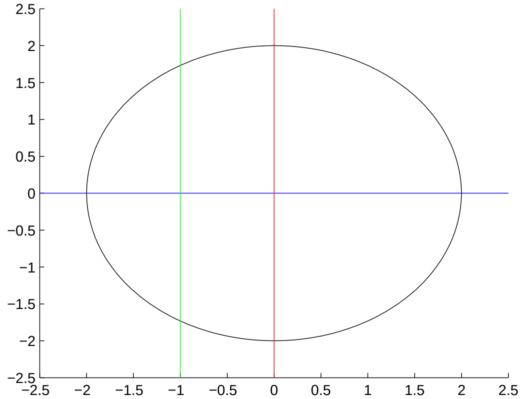
b)(i) Bild von $i\mathbb{R}$:

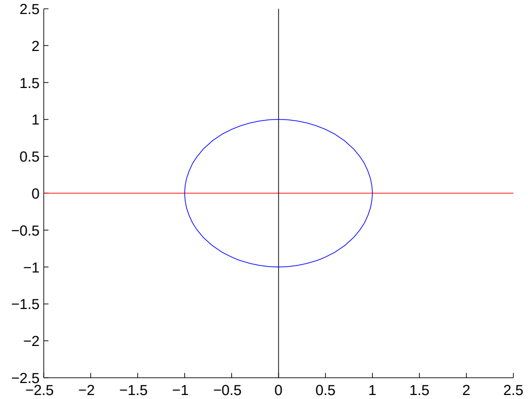
(ii) Bild von $\mathbb{R}$:





(iii) Bild des Kreises $|z| = 2$:





(iv) Bild der Gerade $g:\ \operatorname{Re} z = -1.$
$-2i$ liegt nicht auf $g \Longrightarrow$ Das Bild ist ein echter Kreis.

Im Bildraum sind ∞ und der Mittelpunkt M des Bildkreises symmetrisch bzgl. des Bildkreises.

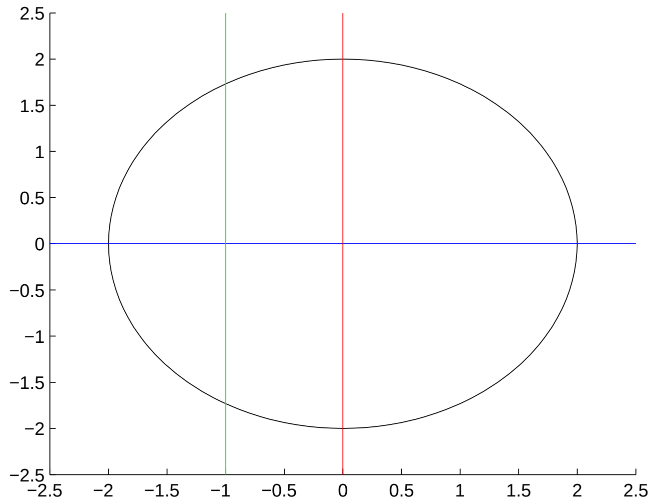
Es gilt $T^{-1}(\infty) = -2i\cdot$

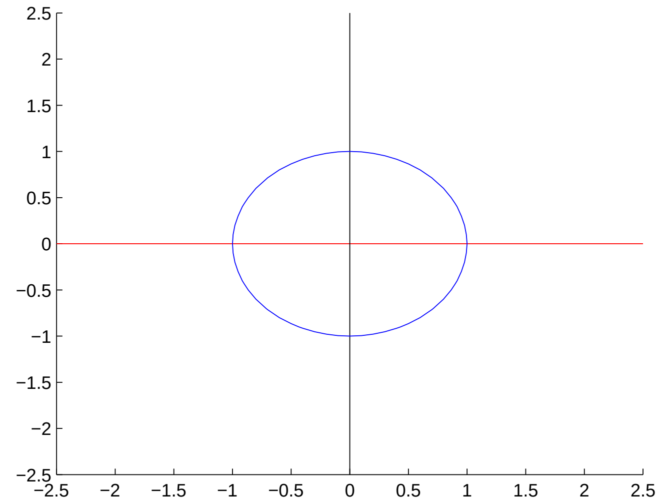
$\Longrightarrow T^{-1}(M) =$?
$\Longrightarrow\ M =$

(v) Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$:

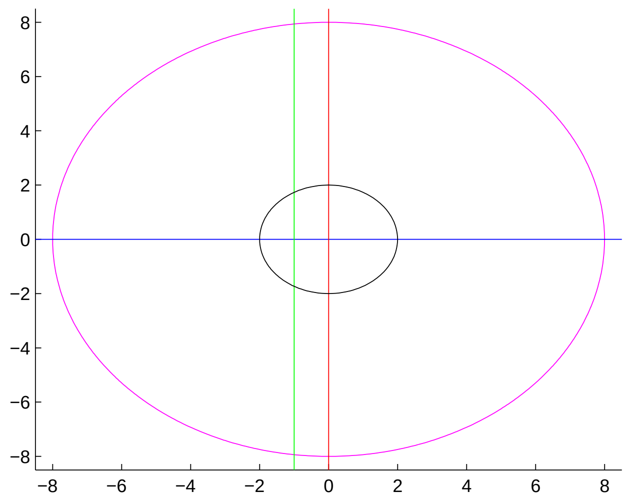
$$T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, \qquad T(-2-2i) = -1-2i$$

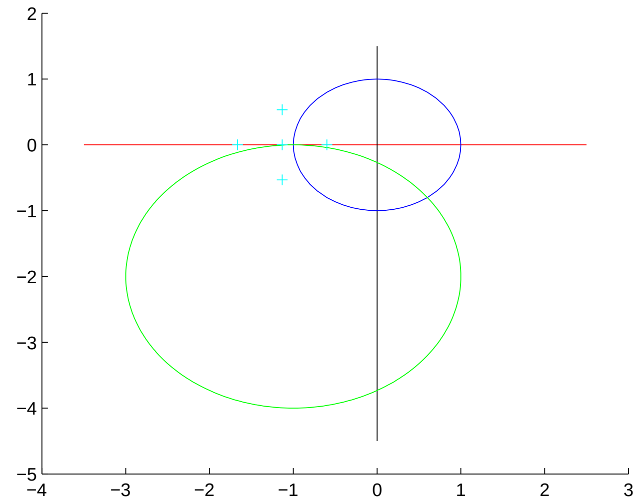
$$T(\mathbb{R}) = \text{ Einheitskreis,} \qquad T(2i) = 0$$





(vi) Bild von $|z| \leq 8$: Das Bild von $|z| = 8$ ist ein echter Kreis symmetrisch zu $\mathbb{R}$, da Urbild symmetrisch zu $i\mathbb{R}$.





$$T(8i) = -\frac{3}{5}, \qquad T(-8i) = -\frac{5}{3}$$

erhält man den Mittelpunkt M und den Radius R:

$$M = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{17}{15} \qquad R = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

$T(0) = 1 \Longrightarrow$ Innere des Kreises $|z| \leq 8$ auf das Äußere des Bildkreises.

Transformationen auf Ringe, Streifen, Sektoren mittels Möbius

Urbilder

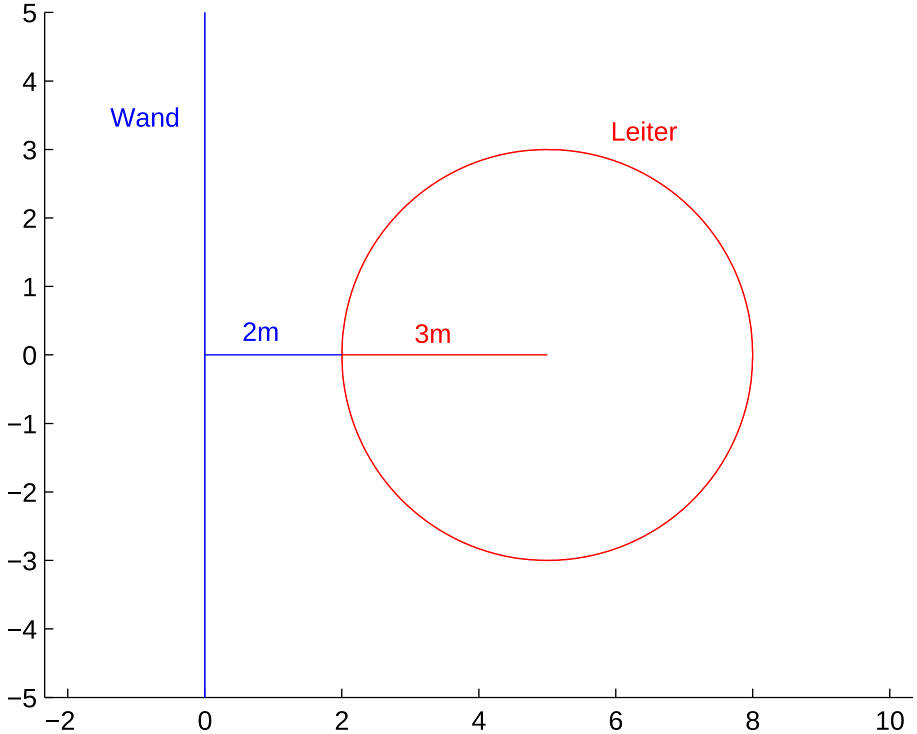
- Kreis und Gerade, die sich in einem Punkt berühren

- Zwei Kreise mit zwei Schnittpunkte

- Kreis und Gerade, die sich nicht berühren

- Zwei Kreise, die sich nicht berühren

Beispiel 1: Kreis und Gerade auf Ring mit Mittelpunkt Null



$g =$ imaginäre Achse, $K =$ Kreis mit Mittelpunkt $C = 5$ und $R = 3$

Bild: konzentrische Kreise K_1, K_2 mit Mittelpunkt $M = 0$.

$\Longrightarrow$ M, ∞ symmetrisch bzgl. $K_1 := T(i\mathbb{R})$ und $K_2 := T(K)$

$\Longrightarrow\ T^{-1}(M), T^{-1}(\infty)$ symm. bzgl.

$i\mathbb{R}$ und K

$\Longrightarrow\ p := T^{-1}(M) = -T^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$

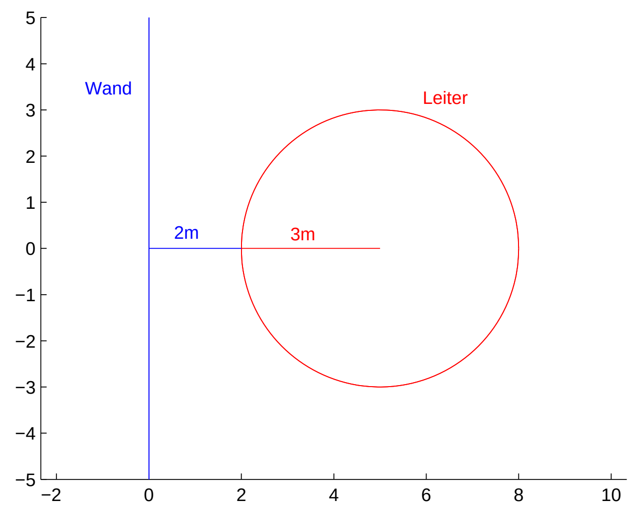
und

$$(p-C)\overline{(-p-C)} = C^2 - p^2 = 25 - p^2 \stackrel{!}{=} R^2 = 9.$$

Die Punkte $z_1 = -4$ und $z_2 = 4$ sind also symmetr. bzgl. g und K.

Definiere $\boxed{\quad T(z) = \dfrac{z-4}{z+4}\quad}$

Nun schauen wir ob T das gewünschte leistet



$T(z) = \dfrac{z-4}{z+4}$

$-4 \notin g,\ -4 \notin K \implies$ Bilder echte Kreise $K_{1,2}$ mit Mittelpunkten $M_{1,2}$

Wegen $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und Symmetrien: $M_{1,2} \in \mathbb{R}$

$T(0) =$ $\qquad$ $T(\infty) =$ $\qquad \implies$

$T(2) =$ $\qquad$ $T(8) =$ $\qquad \implies$

$T(1) =$

$T($ Raum zwischen Wand und Leiter $)$:

Beispiel 2: Zwei Kreise auf Ring um Null

Wieder im Bild $M = 0$ und ∞ symm. zu beiden Bildkreisen

Gesucht im Urbild:
Punkte, die zu zwei Kreisen symmetrisch sind

Beispiel: $K_1 : \; |z + i| \; = \; 1$ und $K_2 : \; |z - 4i| \; = \; 2$

p und p' symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und $K_2 \Longrightarrow$

Punkte müssen auf einem Strahl ausgehend von $M_1 = -i$,
und auf einem Strahl ausgehend von $M_2 = 4i$ liegen.

Sie liegen also auf $i\mathbb{R}$

$p = i\beta \in i\mathbb{R}$ und $p' = ib \in i\mathbb{R}$.

Wegen der Kreissymmetrie muss gelten:

$$K_1 : (p - M_1)\overline{(p' - M_1)} = R_1^2, \qquad M_1 = -i,\ R_1 = 1$$

$$(i\beta + i)\overline{(ib + i)} \ = \ 1^2$$

und analog für K_2 mit $M_2 = 4i$, $R_2 = 2$

$$(i\beta - 4i)\overline{(ib - 4i)} \ = \ 4$$

$\longrightarrow$ zwei Gleichungen für β und b:

$\Longrightarrow$ $\beta + b + \beta b = 0$ und $-4(\beta + b) + \beta b + 12 = 0\,.$

Auflösen ergibt: $b \ = \ \dfrac{6 + 4\sqrt{6}}{5} \ \approx \ 3.1596 \ \wedge \ \beta \ = \ 2.4 - b \ \approx \ -0.7596.$

Joukowski-Funktion $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$z = re^{i\phi}$. Bestimme Bilder für r bzw. ϕ fest

- Offensichtlich: $f(z) = f(\frac{1}{z})$.
- Einheitskreis: $z = e^{i\phi}$:
  $$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi) + \cos(-\phi) + i\sin(-\phi)\right) = \cos(\phi) \end{aligned}$$
- Kreise um Null mit $r \neq 1$ werden auf Ellipsen abgebildet.

Mehr zur Joukowski-Funktion: später!

Tipp zu 2b) $D := \{\cdots\} \cup \{\cdots\} \cup \{\cdots\}$.