Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 2019

Hörsaalübung 2 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Komplexe Zahlenebene, Elementare Funktionen

Präsenzveranstaltung fällt wegen Ostern aus

Natürliche Potenzen/Wurzeln

Unsere Faustregel war: Bei Punktrechnung nutzen wir Polarkoordinaten.

Wir stellen also Komplexe Zahlen als $z = re^{i\varphi}, r, \phi \in \mathbb{R}, r \geq 0$ dar.

Frage: Wie sieht dann z^n für $n \in \mathbb{N}$ aus?

$z = re^{i\varphi} \implies z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.

Der Betrag von z wird potenziert: hoch n,

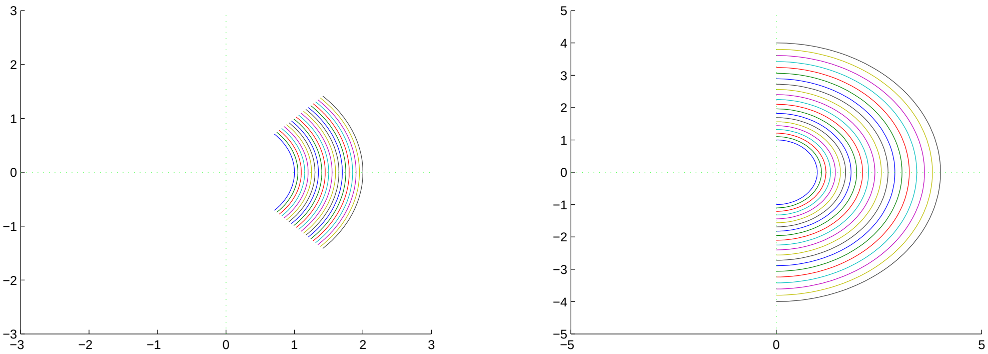
der Winkel wird verfielfacht: mal n.

Beispiel: $D = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r \in [1,2], -\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}\}$

$f(z) = z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i2\varphi} \implies |w| = r^2 \in [1^2, 2^2]$,

Winkel von $(w) = \arg(w) = 2\phi, \qquad \phi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Also $f(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = \rho e^{i\alpha}, \rho \in [1,4], -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$



$D \longrightarrow F(D)$

Wurzeln

Erhalten wir analog

$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(e^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\varphi}{n}}$? **VORSICHT!!**

Wir suchen (bei gegebenem z) Zahlen $w = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z = re^{i\varphi}$.

Es soll also gelten: $\qquad w^n = \rho^n e^{in\alpha} = z = re^{i\varphi}$

Insbesondere müssen dann die Beträge von w^n und z gleich sein!

Also $|w^n| \stackrel{!}{=} |z| \implies \rho^n = r \implies \rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$

Und außerdem muss gelten

$$\frac{w^n}{|w^n|} \stackrel{!}{=} \frac{z}{|z|} \implies e^{in\alpha} \stackrel{!}{=} re^{i\varphi}\,.$$

Da $e^{i\varphi}$ aber 2π periodisch ist, muss nicht unbedingt $n\alpha = \phi$ gelten. Es genügt

$n\alpha = \phi + 2k\pi$ oder $\alpha = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Merke bei Gleichung in $\mathbb{C}$: Beträge müssen übereinstimmen, Argumente müssen nur bis auf $2k\pi$ übereinstimmen!

Beispiel 1:

$$z = \sqrt[2]{i} \iff z^2 \stackrel{!}{=} i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Also $z = \rho e^{i\alpha}$ mit

$$z^2 = \rho^2 e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \iff |z| = \rho = \sqrt{1} = 1,$$

$$e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi\,.$$

Das sind unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten der Lösungen, aber nur zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene:

$$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

Anschaulich: z liegt auf dem Einheitskreis und wenn man den Winkel zu z verdoppelt landet man in i.

Beispiel 2: Zu lösen sei die Gleichung

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})} z^4 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})} \cdot 81$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} z^4 = 81 e^{\frac{i2\pi}{3}} \iff z^4 = 81 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Gleichung in $\mathbb{C}$: Beträge müssen übereinstimmen, Argumente müssen bis auf $2k\pi$ übereinstimmen!

$$|z^4| = |z|^4 = 81 \iff |z| = 3$$

$$\arg(z^4) = 4\arg(z) \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \Longrightarrow$$

$$\arg(z) \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{4}, \frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{4}, \cdots\}$$

Das sind vier verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene.

Allgemein: $n \in \mathbb{N}$, $z = re^{i\phi}$, $w^n = z$ hat in $\mathbb{C}$ die folgenden n Lösungen:

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Will man eine Umkehrfunktion für $f(w) = w^n$, so muss man den Winkelbereich einschränken. In der Regel definiert man den **Hauptwert :**

$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n})}$, mit einem $\phi \in (-\pi, \pi)$.

Tipp zur Hausaufgabe 2a, 2b

Beachten Sie, dass gilt: $|z-a| = |z-b| \Longrightarrow z$ liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von a und b. (vgl. Präsensblatt 1)

$\arg(z-a) = \arg(z-b) \Longrightarrow (z-a)$ und $(z-b)$ liegen auf dem gleichen Strahl durch Null.

Beispiel: (vgl. P2a) Der Keil

$$\left\{z \in \mathbb{C}:\ z = re^{i\phi},\ r \in (0,\infty),\ -\frac{2\pi}{3} < \phi < -\frac{\pi}{3}\right\}$$

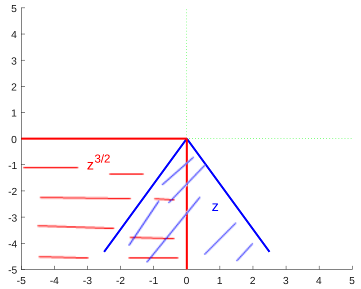
soll auf die obere linke Viertelebene

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

abgebildet werden.

Durch Potenzieren können wir Winkelbereiche vervielfachen. Der Öffnungswinkel des Urbilds ist $\frac{\pi}{3}$ und der Öffnungswinkel des Bild soll $\frac{\pi}{2}$ sein:

Frage $\frac{\pi}{3} \cdot \square = \frac{\pi}{2}$? Antwort: $\square = \frac{3}{2}$

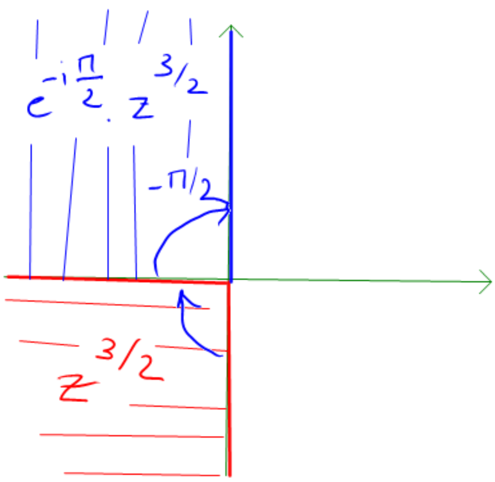


Um den richtigen Öffnungswinkel zu haben rechnen wir also zunächst $\tilde{f}(z) = z^{\frac{3}{2}} = \tilde{w}$.

Dann gilt $\arg(\tilde{w}) \in] -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} [=] -\pi, -\frac{\pi}{2} [$

Der Öffnungswinkel stimmt jetzt. Es muss nur noch um $-\frac{\pi}{2}\,(+2k\pi)$ gedreht werden, also zum Beispiel

$$f(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \tilde{f}(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} z^{\frac{3}{2}} = -iz^{\frac{3}{2}}$$



Veranschaulichung der Exponentialfunktion:

$$\boxed{\exp(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))}$$

Bestimme Bild vom Koordinatennetz (x konstant bzw. y konstant)

Für $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ gilt wegen $|e^{iy}| = 1$ (siehe letzte HÜ)

$$|\,e^z\,| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$$

und mit einem geeigneten $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(e^z) = \arg\,(e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))) = y + 2k\pi = \mathrm{Im}\,(z) \qquad (+2k\pi)$$

$$\boxed{\text{Ist } x = \mathrm{Re}\,(z) \text{ konstant, so ist } |\,e^z\,| \text{ konstant.}}$$

$$\boxed{\text{Ist } y = \mathrm{Im}\,(z) \text{ konstant, so ist der Winkel von } e^z \text{ konstant.}}$$

A) $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x_0 + iy \text{ mit } x_0 \in \mathbb{R} \text{ fest und } y \in \mathbb{R}\}$

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} \cdot e^{iy} \;:\; \text{Betrag fest, Argument läuft mit } y \in \mathbb{R}$$

Bild $f(D)$: unendlich oft durchlaufener Kreis mit Radius $R_{x_0} = e^{x_0}$

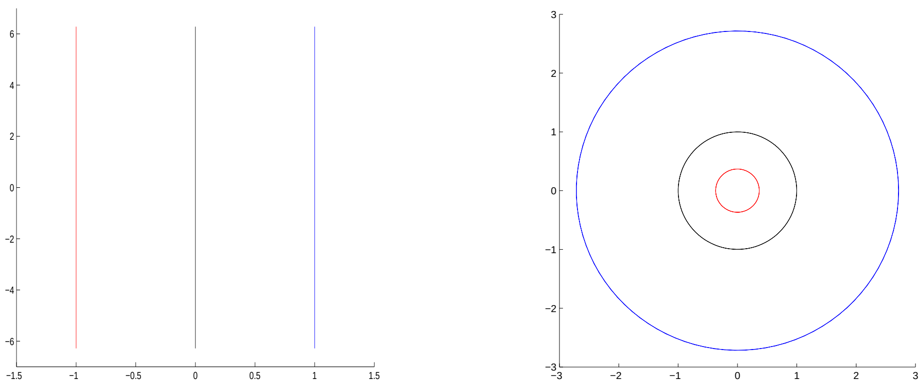


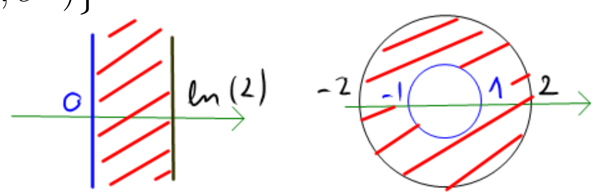
Abbildung 1: Exponentialfunktion

Bild eines zur imaginären Achse parallelen Streifen

$\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \;:\; x \in (x_1, x_2),\, y \in \mathbb{R}\}$, $f(z) = exp(z) = e^z$

ist ein Ring um Null:

$\Longrightarrow f(\tilde{D}) = \left\{w \in \mathbb{C} \;:\; w = |w|e^{i\alpha},\, |w| \in (e^{x_1}, e^{x_2})\right\}$



B) $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy_0 \text{ mit } y_0 \in \mathbb{R} \text{ fest und } x \in \mathbb{R}\}$

$$e^{x+iy_0} = e^x \cdot e^{iy_0} \; : \; \text{Betrag läuft, Argument fest}$$

Bild $f(D)$: Strahl mit Winkel $\alpha = y_0$

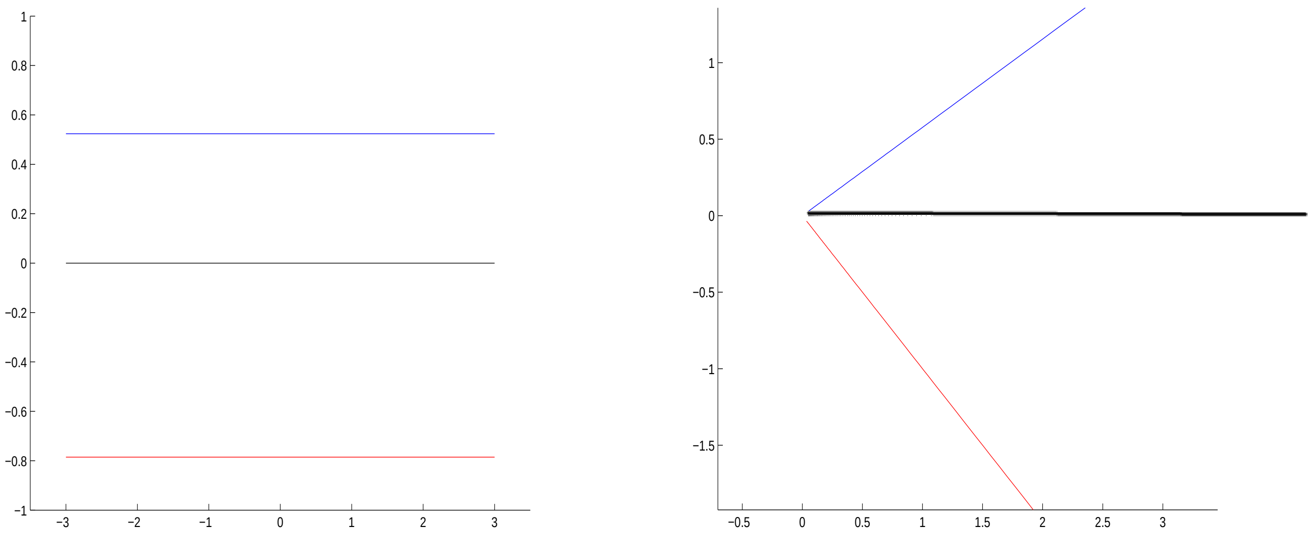
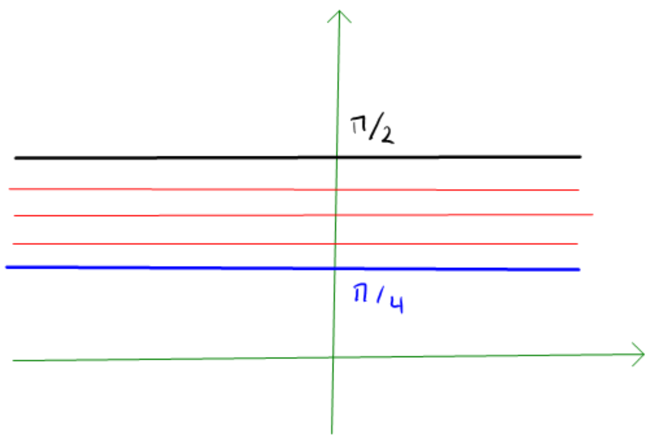
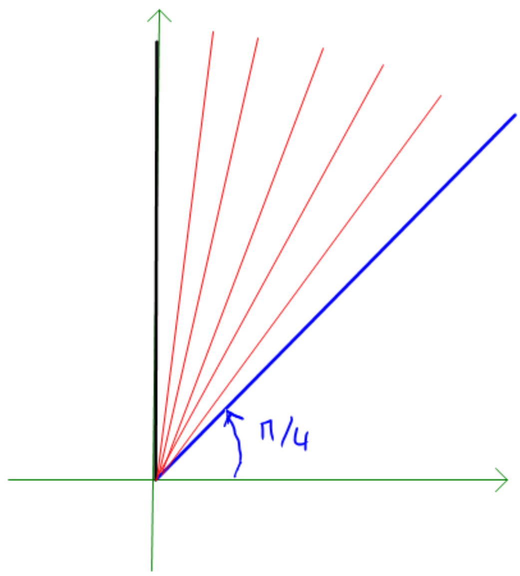


Abbildung 2: Exponentialfunktion

$\tilde{D} =$ Streifen parallel zur $x-$Achse $\Longrightarrow f(\tilde{D}) =$ Sektor





Beispiel 1: (Eventuell hilfreich für H2a, H2b, P2a) Gesucht seien Lösungen von $\quad (e^z)^2 \;=\; -25i$

Mit $z := x + iy$ und unter Berücksichtigung von $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ rechnen wir:

$(e^z)^2 = e^{2z} = e^{2x+2iy} \stackrel{!}{=} -25i = 25e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad !$

Wir vergleichen die Beträge und Argumente auf der linken und rechten Seite der Gleichung:
$|(e^z)^2| = e^{2x} \stackrel{!}{=} |-25i| \;=\; 25 \iff e^x = 5 \iff x = \log(5).$

Hierbei bezeichnet $\ln(5) = \log(5)$ den reellen natürlichen Logarithmus.

Weiter muss gelten: $\qquad e^{2iy} \stackrel{!}{=} e^{-i\frac{\pi}{2}}\,.$

Also mit geeigneten $k \in \mathbb{Z}$:

$\{\arg\left((e^z)^2\right)\} = \{2y - 2k\pi\} \stackrel{!}{=} \{\arg\left(-i\right)\} \;=\; -\frac{\pi}{2}$

$\iff y = \; k\pi \;-\; \frac{\pi}{4}$

Es gibt unendlich viele Lösungen.
$z_k := \ln(5) + i \cdot \left(k\pi \;-\; \frac{\pi}{4}\right)\;,\; k \in \mathbb{Z}.$

Beispiel 2) (vgl. H1, P2a)

Der Streifen $S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\}$

soll auf den Kreisring $R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |\, z - (1+i)\,| < 3\}$

abgebildet werden.

Was können wir?

Verschieben : Addition
Drehen / Strecken : Multiplikation
Sektoren vergrößern/verkleinern : Potenzieren
Streifen parallel zur y-Achse $\longrightarrow$ Ring : exp
Streifen parallel zur x-Achse $\longrightarrow$ Sektor : exp

Ziel: $S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\} \ \rightarrow \ \ R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |\, z - (1+i)\,| < 3\}$

Wir können Streifen parallel zur y-Achse auf Ringe abbilden.
Haben allerdings einen Streifen parallel zur x-Achse.

Schritt 1 : Drehen um $-\pi/2$

$f_1(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot z = \ -i \cdot z =: \tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}$

$f_1(x+iy) = -i(x+iy) = y - ix = \tilde{w}, \qquad -\infty < x < \infty,\, 0 < y < 2$

$f_1(S) = \{\tilde{w} \in \mathbb{C} : \tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}, 0 < \tilde{u} < 2, \, -\infty < \tilde{v} < \infty\}$

Dies ist ein Streifen parallel zur y-Achse! Solche Streifen werden durch die Exponentialfunktion auf Ringe abgebildet.
Jetzt exp anwenden?

Schritt 2: exp direkt würde liefern:

$\exp(f_1(z)) = \exp(\tilde{u} + i\tilde{v}) = e^{\tilde{u}} \cdot e^{i\tilde{v}}$

$|\exp(f_1(z))| = e^u \ \in]e^0, e^2[=]1, e^2[$

$\exp(f_1(S))$ ist ein Kreisring mit Innenradius 1 , Außenradius e^2

Gewünscht ist aber: Innenradius$= 1 = e^0$ und Außenradius $= 3 = e^{\ln(3)}$

Schiebe durch Addition und/oder Multiplkation den linken Rand des Streifens auf Null und den rechten auf $\ln(3)$

Hier stimmt der linke Rand bereits! Also muss nur noch die breite angepasst werden:
Statt der Breite 2 hätten wir gerne die Breite $\ln(3)$, also multiplizieren wir mit $\frac{\ln(3)}{2}$:

$f_2(z) := \frac{\ln(3)}{2} \cdot f_1(z)$

$f_2(S) = \{\hat{w} = \hat{u} + i\hat{v} \,:\, 0 < \hat{u} < \ln(3),\, -\infty < \hat{v} < \infty\}$

Schritt 3: Jetzt machen wir mit Hilfe der Exponentialfunktion aus dem Streifen einen Ring um Null:

$f_3(z) := \exp(f_2(z)) = \exp(\hat{u} + i\hat{v}) = e^{\hat{u}} \cdot e^{i\hat{v}}$

$|f_3(z)| = |\exp(f_2(z))| = |\exp(\hat{u} + i\hat{v})| = |e^{\hat{u}} \cdot e^{i\hat{v}}| = e^{\hat{u}}$

$|f_3(z)| \in]e^0, e^{\ln 3}[=]1, 3[$

$\arg(f_3(z)) = \arg(\exp(\hat{u} + i\hat{v})) = \hat{v} \in]-\infty, \infty[$

$f_3(S)$: ist also ein Kreisring mit Innenradius 1 und Außenradius 3, allerdings **um Null**

Schritt 4: Der Mittelpunkt unseres Ringes soll nicht 0 sondern $1 + i$ sein. Wir verschieben wie auf präsenzblatt 1:

$0 \to 1 + i$ und $z \to z + 1 + i$

$f(z) := f_3(z) + 1 + i = \exp\left[\frac{\ln(3)}{2} \cdot (-iz)\right] + 1 + i\,.$

Umkehrung der Exponentialfunktion: (vgl. H2c, H2d, P2b)

Es sei $w = u + iv = |w|e^{i\arg(w)}$ und

$z = x + iy = |z|e^{i\arg(z)} = f(w) = exp(w) = e^w$

Wie sieht $f^{-1}(z) = w$ aus?

Also welches w gehört zu einem vorgegebenem z?

$|z| = |e^w| = |e^u \cdot e^{iv}| = e^u$
$\Longrightarrow |z| = e^u \Longrightarrow \mathrm{Re}\,(w) = u = \log(|z|) = \ln(|z|)$ (reeller Logarithmus)

$z = |z|e^{i\arg(z)} = e^w = e^u \cdot e^{iv}$
$\Longrightarrow e^{i\arg(z)} = e^{iv} \Longrightarrow \mathrm{Im}\,(w) = v = \arg(z) + 2k\pi$
v ist also nicht eindeutig und für $z = 0$ gar nicht definiert

Insgesamt haben wir als Versuch einer Umkehrung
$w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi$.

Man definiert $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ den mengenwertigen **komplexen Logarithmus**

$$[\log(z)] = \{\ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

Beispiel: Aus unseren Rechnungen in $\mathbb{R}$ hatten wir $\ln(1) = 0$. In $\mathbb{C}$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}[\log(1)] &= [\log(1 \cdot e^{i\cdot 0})] \\ &= \{\ln(|1|) + i(0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Will man exp in $\mathbb{C}$ umkehren, muss man also den Definitionsbereich von exp einschränken. Man definiert den

Hauptzweig/Hauptwert der komplexen Logarithmus Funktion

$$\text{Definiere für } z = re^{i\phi}, \qquad \text{mit} \qquad \boxed{-\pi < \phi < \pi}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\phi = \log(|z|) + i\phi \qquad (*)$$

Der Hauptzweig der Logarithmus Funktion ist definiert
auf $\mathbb{C}$ ohne $\mathbb{R}^-$ und ohne Null :
geschlitzte komplexe Zahlenebene

Er liefert Werte mit Imaginärteil aus $(-\pi, \pi)$.

Bemerkung: Die naive Anwendung der Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ liefert:

$$\log(re^{i\phi}) = \log(r) + \log(e^{i\phi}) = \log(r) + i\phi\,.$$

Also (*) nur, dass man das richtige ϕ nehmen muss!

VORSICHT: (vgl. H2d)

$$a := 2e^{i\frac{2}{3}\pi}, \quad b := e^{i\frac{3}{4}\pi} \Longrightarrow a\cdot b = 2e^{i\frac{17}{12}\pi} = 2e^{-i\frac{7}{12}\pi}$$

$$\log(a\cdot b) = \log(2) - i\frac{7}{12}\pi$$

$$\log(a) = \log(2) + i\frac{2}{3}\pi$$

$$\log(b) = \log(1) + i\frac{3}{4}\pi$$

$$\log(a) + \log(b) = \log(2) + i\frac{17}{12}\pi$$

Im Allgemeinen also $\boxed{\log(a\cdot b) \neq \log(a) + \log(b)}$

Tipp zu H2c: Überlegen Sie mit Hilfe der definition $\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)$ was $\log(z) = \log(-z)$ für $|z|$ und $\arg(z)$ bedeuten würde.

Allgemeine Potenzen: (vgl. H2b)

Seien $\quad a := |a|e^{i\alpha} \neq 0, \quad b \in \mathbb{C},\ \alpha \in (-\pi, \pi)$

Definiere $\quad a^b = \{(e^{\log(a)})^b\} = \{e^{b(\log|a| + i\alpha + i2k\pi)}\}$

Hauptwert : $\quad -\pi < \alpha < \pi$

$$a^b = e^{b(\log|a| + i\alpha)} \qquad b \in \mathbb{C}$$

Speziell für $n \in \mathbb{N}$: $\quad a^n = e^{n(\log|a| + i\alpha)} = |a|^n e^{in\alpha}$

und für $a \in \mathbb{R}^+$

$$a^b = e^{b(\log|a| + i\cdot 0)} = |a|^b \cdot e^0 = a^b \qquad \text{wie gehabt}$$

Beispiel: (vgl. H2b)

Zu lösen sei die Gleichung: $\quad (z-3)^{2i} = e^{\pi}$

$$\begin{aligned} w :=& (z-3)^{2i} = (\exp(\log(z-3)))^{2i} = \exp(\log(z-3)\cdot 2i) \\ &= \exp(2i(\log(|z-3|) + i\arg(z-3))) = \exp\big(2i\cdot\log(|z-3|) + 2i^2\arg(z-3)\big) \\ &= \exp^{-2\arg(z-3)} \cdot e^{i\cdot 2\log(|z-3|)} \end{aligned}$$

Für die Lösungen der Gleichung muss also gelten

$$|w| = e^{-2\arg(z-3)} \stackrel{!}{=} |e^{\pi}| = e^{\pi}$$

$$\Longrightarrow -2\arg(z-3) = \pi \Longrightarrow \arg(z-3) = -\pi/2$$

$z-3$ liegt also auf der negativen imaginären Achse.

$$\boxed{z = 3 + ib,\ b \in \mathbb{R}^-}$$

Weiterhin muss gelten:

$$e^{i\arg(w)} = e^{2i\cdot\log(|z-3|)} = e^{i\arg(e^{\pi})} = e^0 \Longrightarrow 2\log(|z-3|) = 2k\pi$$

Also

$$\log(|z-3|) = k\pi \Longrightarrow |3 + ib - 3| = e^{k\pi} \Longrightarrow |b| = e^{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

Da b eine negative reelle Zahl sein muss, folgt $b = -e^{k\pi}$.

Es gibt also unendlich viele Lösungen

$$\boxed{z_k = 3 - ie^{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$