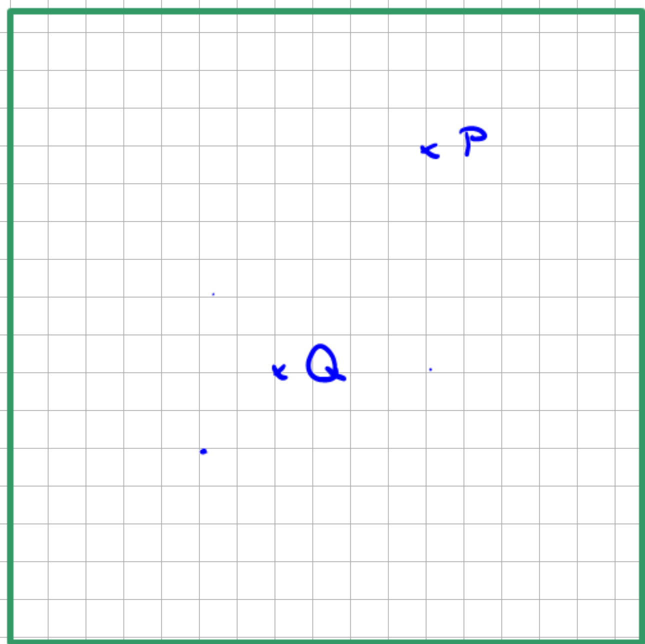
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

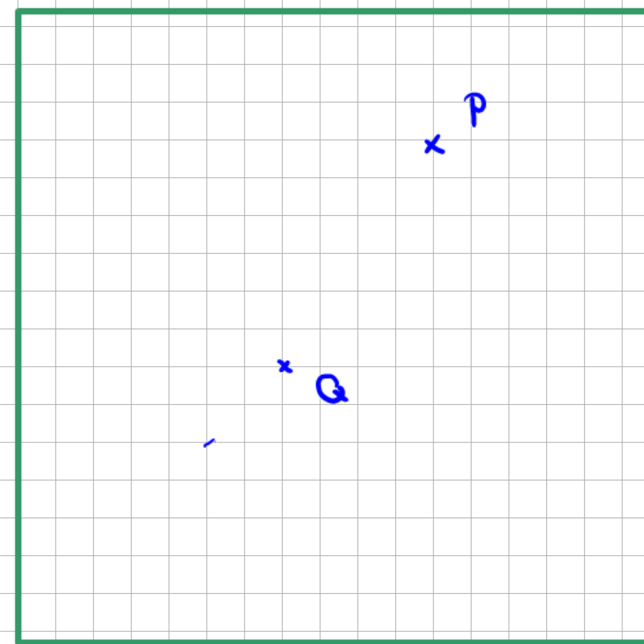
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 1 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Komplexe Zahlenebene, Elementare Funktionen

Ziel: Punkte in der Ebene eindeutig bezeichnen →





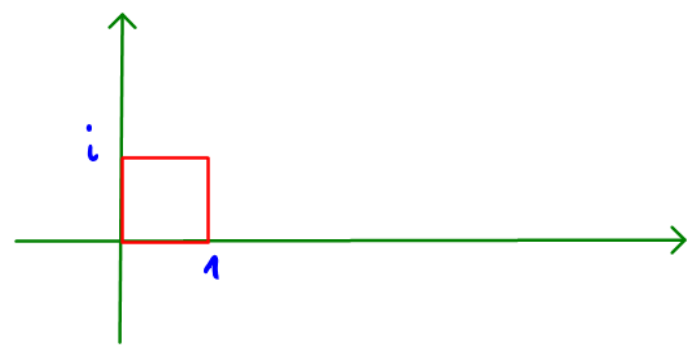
Komplexe Zahlenebene

$z \in \mathbb{C} : z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i =$ imaginäre Einheit

$x =:$ Re $(z), \quad y =:$ Im (z)

Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Addition: wie im $\mathbb{R}^2$ komponentenweise



Geometrische Interpretation:

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine Multiplikation $v, w \in \mathbb{R}^2, v * w \in \mathbb{R}^2$, nur

$$w.v := < w, v > \in \mathbb{R}, \qquad Av \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

In der komplexen Zahlenebene

$$(a + ib)(x + iy) = ax + iay + ibx + i^2 by = (ax - by) + i(ay + bx) \in \mathbb{C}$$

$i^2 =$

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} := \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$, wobei

Konjugiert komplexe Zahl:

$\bar{z} := x - iy$

Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Betrag / Modul: Abstand zu $0 + i \cdot 0$

$= $ **Länge des Ortsvektors** $= \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z \cdot \bar{z}\,.$$

$|z_1 - z_2| =$ Abstand von z_1 und z_2

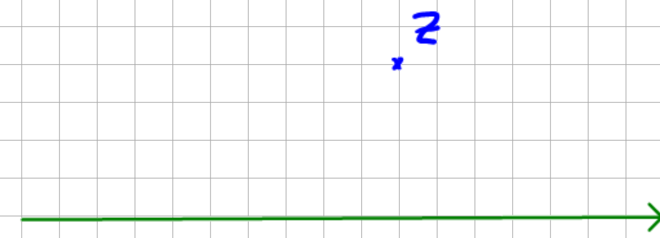
Beispiele: Welche geometrische Gebilde werden beschrieben durch

$$(z - 5)(\bar{z} - 5) = 4,$$

$$|z + 2 + i| = 3,$$

$$|z - 2i| = |z - 1|$$

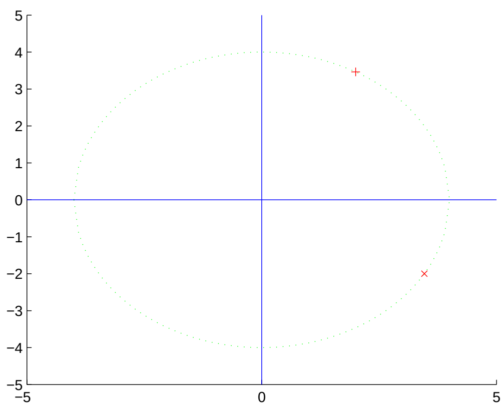
Alternative Darstellung von $z \in \mathbb{C}$



Polarkoordinaten: wie im $\mathbb{R}^2$: $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,,$$

$$z = r\,(\,\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,) =$$



$r = |z| =$ Abstand von z und Null

$\phi =$ Winkel zwischen Ortsvektor und positiver $x-$Achse in mathematisch positiver Richtung
$=$ arg $(z) =$ **Argument von z.**

$z = x + iy$ gegeben $\Longrightarrow$ Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt!

Es gilt: $\cos(\phi) + i\cdot\sin(\phi) = e^{i\phi}$.

Exponentialfunktion:

Wegen $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ gilt

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i\,.$$

und damit für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\exp(iy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iy)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l y^l}{l!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!} \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

Also erhalten wir für $z = x + iy$

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = r\,(\,\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi}$$

Argument von $z =$ arg $(z) =$ arg $(re^{i\varphi}) = \varphi$ **?**

Achtung: Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, denn $e^{i\varphi}$ ist 2π periodisch!

$$re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2k\pi)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

$\{\arg z\}$ oder $[\arg z] :=$ Menge aller Argumente von z

$\arg(z) :=$ Hauptwert von Argument z, festgelegt durch zusätzliche Bedingung

$$\text{i.d.R.} \qquad \varphi \in \left]-\pi,\, \pi\right] \qquad \text{(Hauptwert)}$$

$\arg(0)$ ist nicht definiert!

Beispiele:

A: Einheitskreis:

$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : \, z = \, re^{i\varphi}, \, r = 1, \, \varphi \in \, [0, \, 2\pi)\}$

$$= \, \{z \in \, \mathbb{C} : \, z = \, e^{i\varphi}, \, \varphi \in \, [0, \, 2\pi)\}$$

oder

$$= \, \{z \in \, \mathbb{C} : \, z = \, e^{i\varphi}, \, \varphi \in \, (-\pi, \, \pi]\} \text{ ?}$$

B: Imaginäre Einheit: $|i| = \, |0 \cdot 1 + 1 \cdot i| =$

$$i = \, e^{i\frac{\pi}{2}} \implies i^2 \, = i \cdot i = \, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} \, =$$

C: Betrag e^z :

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$

Wegen $|e^{iy}| \ = \ |\cos(y) + i\sin(y)| =$

$$|\, e^z \,| \ = \ e^x \ = \ e^{\mathsf{Re}\,(z)}$$

Und, arg (e^z) ?

D: Umrechnung kartesisch $\longrightarrow$ polar:

$$z = 2\sqrt{3} - i \cdot 2 \; =$$

$$c = 2 + i \cdot 2\sqrt{3} \; =$$

Konjugiert komplexe Zahl ploar:

$z = re^{i\varphi} \Longrightarrow \bar{z} =$

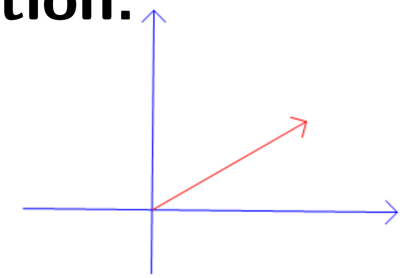
Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Addition polar

$z \mapsto c + z$: Verschiebung um c

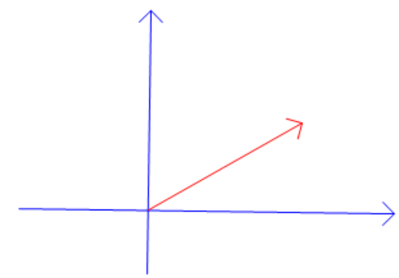
Addition polar: ?

Geometrische Interpretation der Multiplikation:



1. Fall: $a \in \mathbb{R}^+$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto az = are^{i\varphi}$: Streckung (Stauchung) um Faktor a.



2. Fall: $c = e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto cz = re^{i(\varphi + \alpha)}$: Drehung um Winkel α.

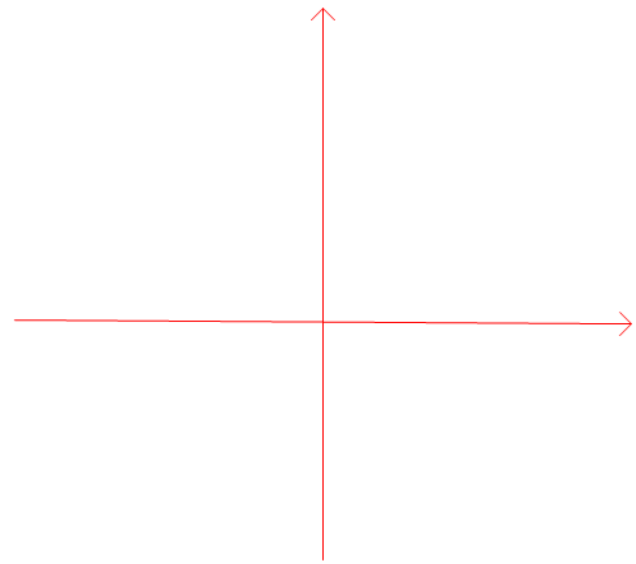
3. Fall: $c = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto cz = are^{i(\varphi + \alpha)}$: Drehstreckung.

Beträge werden multipliziert. Argumente werden addiert.

Beispiel 1: Geometrische Lösung von

$$\text{Re}\ \left((1+i)\bar{z}\,\right) \;=\; 0 \qquad\qquad \text{(Klausur 2005)}$$

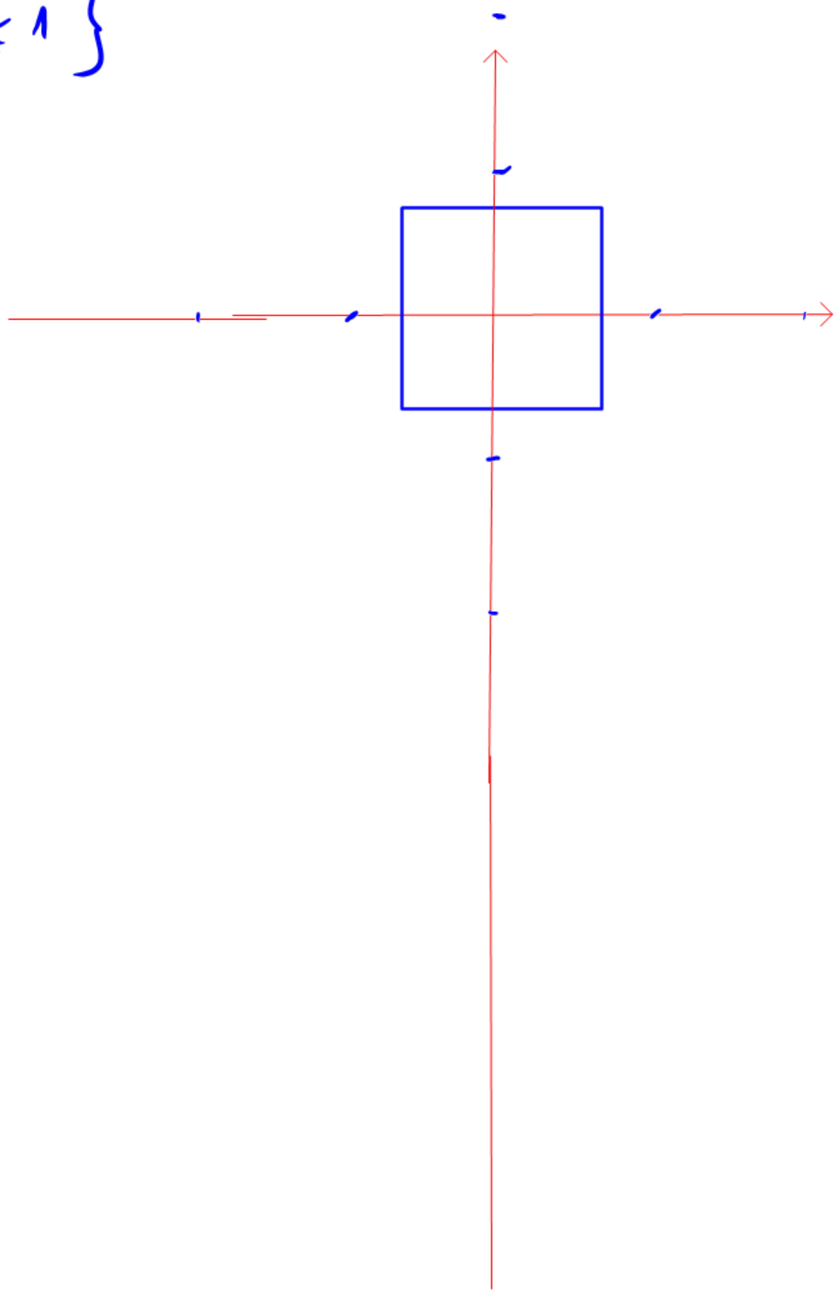


Beispiel 2: Quadrat unter affin linearer Funktion

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq 1, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1 \}$$

$$f(z) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} z - 5i$$

$$f(D) = ?$$



Geometrische Interpretation der affin linearen Funktion

$$f(z) = cz + d$$

Drehstreckung + anschließender Verschiebung

Streckung ist in alle Richtungen gleich!

Unterschied zu linearen Abbildungen im $\mathbb{R}^2$:

$$\text{zum Beispiel :} \qquad \boldsymbol{v} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}$$

Streckung um 1/2 in $x-$Richtung und um 3 in $y-$Richtung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Urbildern $= \frac{\pi}{2}$,

Winkel zwischen Bildern $= \frac{\pi}{4}$.

Bei der komplexen Multiplikation $c \cdot z$ wird nur gedreht und gestreckt. Winkel bleiben erhalten!

Lineare Funktionen in $\mathbb{C}$ können viel weniger als lineare Funktionen in $\mathbb{R}^2$

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit$=$ hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$: viel mehr als Differezierbarkeit im $\mathbb{R}^2$!

Lokal: $f(z) \approx az + b =: u(x,y) + i\,v(x,y)$

Im R^2 : $\quad \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Longrightarrow J\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Später: Diffbarkeit in $\mathbb{C}$:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

(Cauchy-Riemannsche DGL'n).

Beispiel für eine Lineare Funktion: Die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2-i| < 3,\ \mathsf{Re}\,(z) > 2\}$$

soll auf die obere Hälfte des Einheitskreise ($|z| < 1$) transformiert werden. Wie geht das?

Die Funktion $w = f(z) := z^{-1}$

Bilder wieder einfacher in Polarkoordinaten.

Beispiel: Bild von punktierter Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung

$$D := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \,<\, 2 \,\}$$

$$z = re^{i\phi}, \qquad 0 < \, r \leq \, 2,\, 0 \leq \, \phi < \, 2\pi$$

$$w = f(z) := z^{-1} = \, \frac{1}{re^{i\phi}}$$

$$w = \tfrac{1}{r}e^{-i\phi} \, = \, \rho e^{i\alpha} \qquad \rho \in \, [\tfrac{1}{2}, \infty[, \, -2\pi \, < \, \alpha \, \leq \, 0$$

Beispiel: Bild des Sektors $D := \{ z \in \mathbb{C} :]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$

Beispiel: Bild von Kreisscheibe mit Radius 2 um $z_0 = 2$?