Komplexe Funktionen

16. 04. 2018

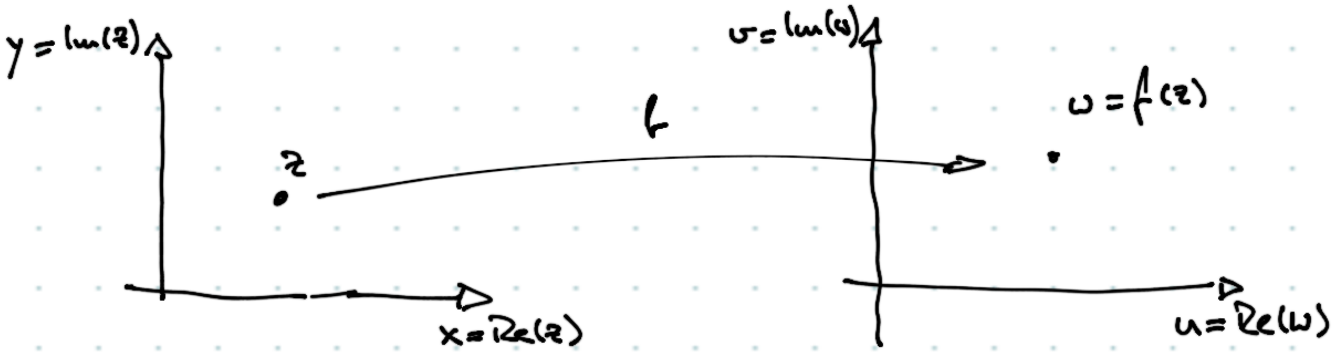
J. Behrens

① Frage: wie stellen wir f graphisch dar?

Antwort: Skizziere Definitions- und Wertebereich in zwei verschiedenen komplexen Ebenen

z-Ebene (Urbildebene)

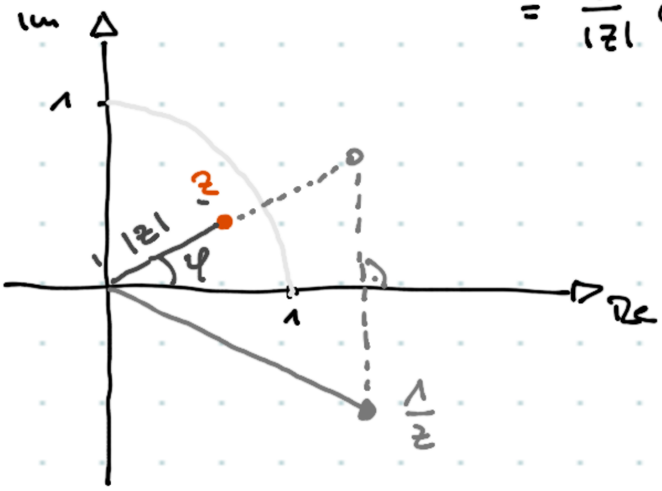
w-Ebene (Bildebene)



Beispiel: (in einer Ebene) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$= \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$ falls $z = |z| e^{i\varphi}$

Geometrisch



② Zur Frage der $\mathbb{R}$-Linearität und $\mathbb{C}$-Linearität

- Sei $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linear

  dann muss auch gelten $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2)$

  $L(\lambda z) = \lambda L(z)$, $z_1, z_2, z, \lambda \in \mathbb{C}$

- Fasse L als Abb $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf mit $z = z_r + i z_i = (z_r, z_i)$

- Dann $L z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig falls L nur $\mathbb{R}$-linear

- Frage: welche Bedingungen müssen an a, b, c, d gestellt werden, damit L $\mathbb{C}$-linear ist?

- Betrachte: $L_1 z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$ ist nicht $\mathbb{C}$-linear

  - Sei $z = (1, 0)$
  - $L_1(iz) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + 0i \neq i L_1(z) = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i^2$

    $= (-1 + 0i)$

- $\mathbb{C}$-Linearität erfordert $L(i) = i L(1)$

  $\iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $\iff \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ a \end{bmatrix}$

  $\implies b = -c$, $d = a$

  $\implies$ $\mathbb{C}$-lineare Abb L: $L(z) = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix}$

③ Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$

∘ Parallelen zur x-Achse, $y \equiv y_0$

$$\Rightarrow \quad u = x^2 - y_0^2 \quad , \quad v = 2 x y_0$$

∘ $y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = x^2 \, , \, v = 0$

• $y_0 \neq 0$ verwende $x = \dfrac{v}{2 y_0} \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{v^2}{4 y_0^2} - y_0^2$

- nach rechts geöffnete Parabel
- symmetrisch zur u-Achse
- Brennpunkt in der Null
- Schnittpunkte u-Achse $u = -y_0^2$, v-Achse $v = \pm 2 y_0^2$

∘ Entsprechend: Parallelen zur y-Achse $x \equiv x_0$

⋮

• $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -y^2 \, , \, v = 0$

∘ $x_0 \neq 0 \quad \Rightarrow$ mit $y = \dfrac{v}{2x_0}$: $u = x_0^2 - \dfrac{v^2}{4 x_0^2}$

- nach links geöffnete Parabel
- symmetrisch zur u-Achse
- Brennpunkt Null
- Schnittpunkte $u = -x_0^2$ (u-Achse), $v = \pm 2x_0^2$ (v-Achse)

$\Rightarrow$ konfokale Parabelschaar