Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen gibt es für die folgenden Funktionen zu den jeweils angegebenen Entwicklungspunkten z_0?

(i) $f_1(z) = \dfrac{2z-7}{z^2+3z-4}, \qquad z_0 = 0,$

(ii) $f_2(z) = \dfrac{\cos(z)-2}{z^2}, \qquad z_0 = 0.$

b) Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen aus Teil a) und berechnen Sie die zugehörigen Residuen.

c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung von f_1 an.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

a) (i) $f_1(z) = \dfrac{2z-7}{z^2+3z-4}, \qquad z_0 = 0.$

Wegen $z^2+3z-4 = (z+4)(z-1)$ gibt es drei Laurentreihen. Jeweils eine in:

$R_1: \; 0 < |z-z_0| < 1, \qquad R_2: \; 1 < |z-z_0| < 4, \qquad R_3: \; 4 < |z-z_0|.$

(ii) Die einzige mögliche Singularität liegt in $z_0 = 0$. Es gibt nur eine Laurentreihe.

$$\begin{aligned} f_2(z) = \frac{\cos(z)-2}{z^2} &= -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} \\ &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2(k-1)} \qquad 0 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

b) (i) $f_1(z) = \dfrac{2z-7}{(z+4)(z-1)}$ hat die einfachen Pole $z_1 = -4$ und $z_2 = 1$.

$$Res\ f_1(-4) = \left[\frac{2z-7}{z-1}\right]_{z=-4} = \frac{-8-7}{-4-1} = 3$$

$$Res\ f_1(1) = \left[\frac{2z-7}{z+4}\right]_{z=1} = \frac{2-7}{1+4} = -1$$

(ii) Nach Teil a) gilt

$$f_2(z) = \frac{\cos(z)-2}{z^2} = -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2(k-1)} \qquad 0 < |z| < \infty.$$

Es liegt ein Pol zweiter Ordnung in $z_0 = 0$ vor. Man liest aus der Reihendarstellung ab: $Res\ f_2(0) = 0$.

c) Nach a) und b) folgt

$f_1(z) = \frac{3}{z+4} + \frac{-1}{z-1}$.

Aufgabe 2)

Gegeben ist $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 6z + 10}\,.$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f .

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f .

c) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3 + i$, die im Punkt $z^* = 0$ konvergiert.

d) Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern diese definiert sind.

i) $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz, \qquad \Gamma_1 := \{z(t) := 2\,e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\},$

ii) $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz, \qquad \Gamma_2 := \{z(t) := i \,+\, 3\,e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\},$

iii) $\displaystyle\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz, \qquad \Gamma_3 := \{z(t) := 3 - 2i \,+\, 2\,e^{it} \,|\, t \in [0, 4\pi]\},$

iv) $\displaystyle\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz, \qquad \Gamma_4 := \{z(t) := 3 - 2i \,+\, 2\,e^{-it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\},$

v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\,dx\,.$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2) $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 6z + 10}\,.$

a) Nennernullstellen: $(z-3)^2 + 1 = 0 \iff z_{1,2} = 3 \pm i$.

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-(3+i))(z-(3-i))}\,.$$

In $z_{1,2}$ liegen einfache Pole vor. **[1 Punkt]**

b) Residuen

$$Res\, f(3+i) = \left[\frac{1}{z-(3-i)}\right]_{z=3+i} \;=\; \frac{1}{3+i-(3-i)} \;=\; \frac{1}{2i} \;=\; -\frac{i}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$Res\, f(3-i) = \left[\frac{1}{z-(3+i)}\right]_{z=3-i} \;=\; \frac{1}{3-i-(3+i)} \;=\; \frac{1}{-2i} \;=\; \frac{i}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 3 + i$ im Ring

$$|3 - i - z_0| = |3 - i - 3 - i| = 2 < |z - z_0| = |z - (3 + i)|.$$

$$\frac{1}{z - (3 - i)} = \frac{1}{(z - (3 + i)) + 2i} = \frac{1}{z - (3 + i)} \frac{1}{1 + \frac{2i}{z-(3+i)}}$$

$$= \frac{1}{z - (3 + i)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z - (3 + i)} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-2i)^k \, (z - (3 + i))^{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-2i)^{-k-1} \, (z - (3 + i))^k .$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - (3 + i))(z - (3 - i))} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-2i)^{-k-1} \, (z - (3 + i))^{k-1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2} (-2i)^{-k-2} \, (z - (3 + i))^k . \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

.

d) Integrale sofern diese definiert sind.

(i) $\Gamma_1 := \{z(t) := 2\, e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = 0 \qquad \text{(CIS)} \ \textbf{[1 Punkt]}$$

(ii) $\Gamma_2 := \{z(t) := i + 3\, e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$,

$$\oint_{\Gamma_2} f(z)\, dz, \quad \text{ist nicht definiert, da } z_1 = 3 + i \text{ auf der Kurve liegt.} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(iii) $\Gamma_3 := \{z(t) := 3 - 2i + 2\, e^{it} \,|\, t \in [0, 4\pi]\}$,

$$\oint_{\Gamma_3} f(z)\, dz, = Uml(\Gamma_3, 3 - i) 2\pi i \, Res\, f(3 - i) = -2\pi . \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(iv) $\Gamma_4 := \{z(t) := 3 - 2i + 2\, e^{-it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$,

$$\oint_{\Gamma_4} f(z)\, dz, = Uml(\Gamma_4, 3 - i) 2\pi i \, Res\, f(3 - i) = \pi \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(v) $c_5 = \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10}\, dx = 2\pi i \, Res\, f(3 + i) = \pi . \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Bearbeitungstermine: 29.6.15 - 3.7.15