Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)\,.$

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$
$f_2(z) = (\mathrm{Re}\,(z)+2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z)+2)^2 + i\big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z)+4) + \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z)+4)\big]\,\cdot$

c) $f_3 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \dfrac{z^2}{\bar{z}}\,.$
Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r}v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi\,.$

Lösungsskizze zu 1:

a) $f_1(z) = \mathrm{Re}\,(z)\cdot\mathrm{Im}\,(z) = xy + 0\cdot i \iff u = xy,\ v = 0$
Wir überprüfen die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen:
$u_x = v_y \iff y = 0,$ und $u_y = -v_x \iff x = 0$
Die Funktion ist nur in Null komplex diff.bar.

b) $f_2(z) = (\mathrm{Re}\,(z)+2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z)+2)^2 + i\big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z)+4) + \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z)+4)\big]\,\cdot$
$u = (x+2)^2 - (y+2)^2$ und $v = y(x+4) + x(y+4)$
Also $u_x = 2(x+2) = v_y = x+4+x$ und $-u_y = 2(y+2) = v_x = y+y+4\,.$
Die Funktion ist also überall komplex diffbar. Es ist $f_2(z) = (z+2+2i)^2 - 8i\,.$

c) $f_3(z) = \dfrac{z^2}{\bar{z}} = \dfrac{r^2e^{2i\varphi}}{re^{-i\varphi}} = re^{3i\varphi} = r\cdot\cos(3\varphi) + i\cdot r\cdot\sin(3\varphi)$

$u_r = \cos(3\varphi),\qquad \frac{1}{r}v_\varphi = 3\cdot\cos(3\varphi)$
f_3 kann nur in Punkten mit $\cos(3\phi) = 0$ differenzierbar sein.
$v_r = \sin(3\varphi),\qquad \frac{1}{r}u_\varphi = -3\cdot\sin(3\varphi)$
f_3 kann nur in Punkten mit $\sin(3\phi) = 0$ differenzierbar sein.
Es gibt aber keinen Winkel für den Sinus und Cosinus verschwinden. f_3 ist nirgends differenzierbar.

Alternativ:

Die Funktion $f_4(z) = \bar{z} = x - iy$ *ist nicht holomorph. Denn* $u_x = 1 \neq v_y = -1$. *Wäre* f_3 *holomorph, so wäre auch*

$z^2 \cdot (f_3(z))^{-1}$ *holomorph!*

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit

(i) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 3$.

(ii) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = k \log \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tipp: Hier wählt man am besten wieder die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:
$u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$.

b) Gegeben ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) := (e^{2y} - e^{-2y}) \sin(2x)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v. D.h.: Bestimmen Sie v so, dass $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ holomorph wird.

Lösung zu Aufgabe 2)

a) Alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit

(i) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 3$ ergeben sich wegen $u_x = u_y = 0$ aus $v_x = v_y = 0$ zu
$v = k \in \mathbb{R}$ konstant oder $f(z) = 3 + ik$.

(ii) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = k \log \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cauchy Riemannschen Dgl'n in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$

Es ist : $u = k\,\mathrm{Log}(r)$ also $u_r = \dfrac{k}{r}$ und $u_\varphi = 0$.

Für eine holomorphe Funktion folgen die Gleichungen

$v_\varphi = k$ und $v_r = 0$ oder $v = k\varphi + C = k \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + C \quad C \in \mathbb{R}$ konstant.

$f(z) = u + iv = k\,\mathrm{Log}(z) + C \cdot i$.

b) (i) Es gilt:

$$u_x(x, y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\cos(2x), \quad u_{xx}(x, y) = -4\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin(2x)$$

sowie

$$u_y(x, y) = \left(2e^{2y} + 2e^{-2y}\right)\sin(2x), \quad u_{yy}(x, y) = \left(4e^{2y} - 4e^{-2y}\right)\sin(2x)$$

also $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(ii) Zu erfüllen sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir suchen also ein Potential zu $(-u_y, u_x)^T$.

$$v_x = -2\left(e^{2y} + e^{-2y}\right)\sin(2x) \implies v = \left(e^{2y} + e^{-2y}\right)\cos(2x) + C(y)$$

$$v_y = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\cos(2x) + C'(y) \overset{!}{=} u_x(x,y) = 2\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\cos(2x)$$

Man kann also $v = (e^{2y} + e^{-2y})\cos(2x)$ und damit

$$f(z) = f(x+iy) = \left(e^{2y} + e^{-2y}\right)(\sin(2x) + i\cos(2x)) \qquad \text{wählen.}$$

Bearbeitungstermine: 1.6.15 - 5.6.15