Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:
Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben
$K_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \frac{5}{2}| \leq \frac{3}{2}\right\}$, und
$K_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z + \frac{5}{2}| \leq \frac{3}{2}\right\}$
auf ein Parallelstreifen oder auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Welche der beiden Transformationen ist mit Hilfe einer Möbius-Transformation möglich?

b) (Klausur SoSe 09 Aufg.1b, Hinze/Kiani) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels **einer** Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r\, e^{i\phi},\, r \in \mathbb{R}^+,\, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < |z| < \beta \} \,.$$

(ii)
$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < \mathrm{Re}\,(z) < \beta \} \,.$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha|\,,\, |z - \beta| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \right\} .$$

Lösung zu Aufgabe 1)

a) Die beiden Urbildkreise haben keinen Schnittpunkt. Bei der Abbildung auf einen Streifen müssten die Kreise auf zwei Graden g_1 und g_2 abgebildet werden. Diese hätten aber einen Schnittpunkt, nämlich den unendlich fernen Punkt. Eine Abbildung auf einen Ring ist möglich. Siehe Vorlesung Folien 75, 76.

b) Ein Sektor S der angegebenen Form wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit den zwei Schnittpunkten Null und ∞.

(i) Das Ringgebiet

$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta \} .$$

wird begrenzt durch zwei schnittfreie verallgemeinerte Kreise. Die Transformation von G_1 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

(ii) Der Parallelstreifen

$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta \} .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit dem Schnittpunkt ∞. Die Transformation von G_2 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

(iii) Das Gebiet

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| , |z - \beta| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| \right\} .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit zwei Schnittpunkten z_1 und z_2. Bildet man mittels Möbiustransformation einen dieser Schnittpunkte auf Null ab, und den anderen auf ∞ so geht G_3 in einen Sektor über.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) = 0\,, \qquad T(0) = 2\,, \qquad T(2i) = \infty\,.$$

b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

(i) $K :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 2 \}$,

(iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \}\,.$$

d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) > 3 \}\,.$$

Lösungsskizze Aufgabe 2)

a) $\qquad T(i) = 0\,, T(2i) = \infty \iff \qquad T(z) = \dfrac{a(z-i)}{z-2i}.$

$T(0) = 2\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T(z) = \dfrac{4(z-i)}{z-2i}.$

b) (i) Wegen der gegebenen Bilder von $0,\ i,\ 2i$ ist $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $\qquad 2i \in i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = 2,\ T(\infty) = 4 \iff T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(ii) $\qquad 2i \in K_2 \iff T(K_2)$ ist eine Gerade.

K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R} \quad \Longrightarrow T(K_2)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$.

$T(-2i) = \dfrac{4(-3i)}{-4i} = 3 \iff T(K_2)$ ist die Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt 3

$$g_2 := T(K_2) = \{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = 3 + iv,\ v \in \mathbb{R} \}.$$

(iii) $\qquad 2i \notin \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis K_R.

$\mathbb{R}$ symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ und $K_2 \quad \Longrightarrow T(\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und g_2. Der Mittelpunkt des Bildkreises ist also $M = 3$.

Wegen $T(0) = 2$ ist der Radius $R = 1$.

c) Das Bild der Viertelebene wird berandet durch $\mathbb{R}$ und K_R.

$T(2i) = \infty \implies$ obere Halbebene $\longrightarrow$ Äußere von K_R.

$T(2) = \dfrac{8-4i}{2-2i} = \dfrac{2(2-i)(1+i)}{1-i^2} = 2+2i-i+1 = 3+i$.

Die rechte Halbebene wird also auf die obere Halbebene abgebildet.

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(w) > 0,\ |w-3| > 1\}.$$

d) Das Bild der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ ist ein echter Kreis, da $2i$ nicht auf der Geraden liegt. Der Mittelpunkt C und ∞ sind symmetrisch bezüglich des Bildkreises. Also ist

$T^{-1}(\infty) = 2i$ bzgl. der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ symmetrisch zu $T^{-1}(C)$

$\implies T^{-1}(C) = 2i+6 \iff C = T(2i+6) = \dfrac{4(2i+6-i)}{2i+6-2i} = 4 + \frac{2i}{3}$

Wegen $T(\infty) = 4$ hat der Kreis den Radius $r = \frac{2}{3}$. Wegen $T(0) = 2$ wird $E : \mathrm{Re}\,(z) > 3$ auf das Innere des Kreises abgebildet.

Bearbeitungstermine: 11.5.15 - 15.5.15