Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:
Charakterisieren Sie durch eine Skizze oder mit Worten die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4-3i| \leq 5\}, \\
M_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z+2+i|\}, \\
M_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid z+\bar{z} = 2\}, \\
M_4 &= \{0\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1:

a) M_1 : Kreisscheibe mit Radius $r = 5$ und Mittelpunkt $M = -4+3i$ inklusive Rand,

b) M_2 : Abstand von i = Abstand von $-2-i$ $\Rightarrow$ Mittelsenkrechte auf die Verbindung zwischen i und $-2-i$,

c) M_3 : $\mathrm{Re}\,(z) = 1$: Parallele zur imaginären Achse durch $1 + 0 \cdot i$,

d) M_4 : $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{z\bar{z}}\right) = 0$

Für $z \neq 0$ gilt: $\mathrm{Re}\left(\frac{(x+iy)^2}{(x+iy)(x-iy)}\right) = 0 \iff x^2 - y^2 = 0$

M_4 besteht also aus den zwei Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = \pm\mathrm{Im}\,(z)$.

Alterenativ: $z = re^{i\phi}$, $r \neq 0$.

$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\phi}}{re^{-i\phi}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i2\phi}\right) = 0 \iff 2\phi = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$k = 0 :\ z = re^{i\,\frac{\pi}{4}}$, $\quad k = 1 :\ z = re^{i\,\frac{3\pi}{4}}$,

$k = -1 :\ z = re^{-i\,\frac{\pi}{4}}$, $\quad k = -2 :\ z = re^{-i\,\frac{3\pi}{4}}$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Bilder der Mengen D bzw $\tilde{D}$ unter den angegebenen Funktionen. Skizzieren Sie jeweils die Definitionsmengen und deren Bildmengen.

a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| \leq 4, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq 2\}$,
$f_1(z) = 0.5z, \quad f_2(z) = 0.5e^{i\pi/2}z$,

b) $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, \mathrm{Re}\,(z) > 0\,, \mathrm{Im}\,(z) < 0\}$,
$f_3(z) = \left(e^{i\pi/4}z\right)^2$, $f_4(z) = \left(e^{i\pi/4}z\right)^2 + 1 + i\,.$

Lösung zu Aufgabe 2:

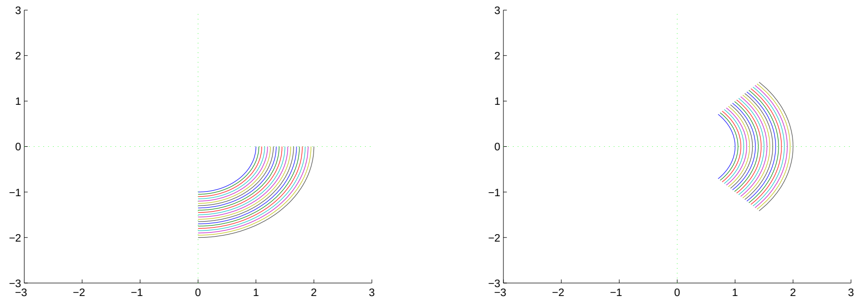
a) D: Achsenparalleles Rechteck mit Seitenlängen 8 und 4 und Mittelpunkt Null.

D wird durch f_1 um den Faktor 0.5 gestreckt und durch f_2 zusätzlich um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht.

$f_2(D) : w = u + iv, -1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2\,.$

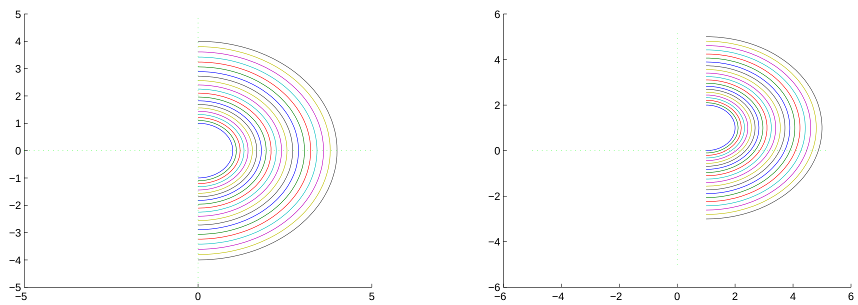
b) $\tilde{D}$: Unteres rechtes Viertel des Kreisringes um Null mit Innenradius = 1, Außenradius = 2. $z = re^{i\phi}$, $r \in [1,2]$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0\,.$

$\tilde{D}$ wird durch f_3 zunächst um $\pi/4$ gedreht:
$\tilde{w} = e^{i\pi/4}z = \rho\, e^{i\alpha}$, $\rho \in [1,2]$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}\,.$
Anschließend wird quadriert und man erhält: $w = R\, e^{i\beta}$, $R \in [1,4]$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\,.$



$f_3(\tilde{D})$ ist also die rechte Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius = 1, Außenradius = 4.

$f_4(\tilde{D})$ ist das um $1 + i$ verschobene Bild von $\tilde{D}$ unter f_3, also die rechte Hälfte des Kreisringes um $1 + i$ mit Innenradius = 1, Außenradius = 4.



Merke: Multiplikation mit einer (festen) komplexen Zahl bewirkt eine Drehstreckung. Addition einer (festen) komplexen Zahl bewirkt eine Verschiebung.

Bearbeitungstermine: 13.4.15 - 17.4.15