Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) an.

$$z_1 = -3, \quad z_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\cdot i), \quad z_3 = 2\sqrt{8}(-1-i)\,.$$

b) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten ($z = x+iy$) an und skizzieren Sie die zugehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene.

$$z_k = e^{ik\pi} \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad w = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 1:

a) $z_1 = -3 = 3(-1+0\cdot i) \qquad r = \sqrt{3^2+0^2} = 3,$
$\cos(\phi) = -1, \sin\phi = 0 \Longrightarrow \phi = \pi\,(+2k\pi)\,,\ z_1 = 3e^{i\pi}$

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \qquad r = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}} = 1,$$

$$\sin(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\phi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{3}\,(+2k\pi)\,, \quad z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$z_3 = 2\sqrt{8}(-1-i) \qquad r = 2\sqrt{8}\cdot\sqrt{1+1} = 8,$$

$$z = 8\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow \phi = \frac{-3\pi}{4}\,(+2k\pi)\,, \quad z_3 = 8e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

b) $z_k = e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + i\sin(k\pi) = (-1)^k\,,$

$$z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\big) = 1+i\,,$$

$$w = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}) + \cos(\tfrac{-\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{-\pi}{3}) = 1\,.$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen

i) $z^4 = 81,$ ii) $z^4 = \frac{81}{\sqrt{2}}(1+i),$

iii) $e^z = 4,$ iv) $e^z = 2 + 2i.$

b) Es sei (wie im Reellen) $\cosh(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\cosh(z) = \cosh(x)\,\cos(y) + i\,\sinh(x)\sin(y)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ gilt und berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $\cosh(z) = \dfrac{3i}{4}$.

Lösungsskizze zu 2:

a) i) $z^2 = \pm 9 \iff z = \pm 3 \vee z = \pm 3i$

ii) $z^4 = (re^{i\phi})^4 = r^4 e^{i4\phi} = 81(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \iff z = re^{i\phi}\ :\ r = 3,\ 4\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Es gibt vier verschiedene Punkte der komplexen Ebene, die die Gleichung erfüllen. Diese erhält man z.B. für

$$\phi \in \{\ \tfrac{\pi}{16}\ ,\ \tfrac{\pi}{16} + \tfrac{\pi}{2}\ ,\ \tfrac{\pi}{16} + \tfrac{2\pi}{2}\ ,\ \tfrac{\pi}{16} + \tfrac{3\pi}{2}\ \}$$

iii) $z = x+iy$ mit : $e^z = e^x \cdot e^{iy} = 4 \cdot e^{0+2k\pi\, i} \implies x = \log(4), \qquad y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

iv) $z = x + iy$ mit : $e^z = e^x \cdot e^{iy} = 2\sqrt{2} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \implies \begin{array}{l} x = \ln(2\sqrt{2}) \\ y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$

b)

$$\begin{aligned}
\cosh(z) &= \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos(y) + i\sin(y)) + e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(y)(e^x + e^{-x}) + i\sin(y)(e^x - e^{-x})\right) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)\,.
\end{aligned}$$

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)\,.$$

Zu lösen ist $\cosh(x)\,\cos(y) + i\,\sinh(x)\sin(y) = 0 + i\,\dfrac{3}{4}$

Aus $\cosh(x)\,\cos(y) = 0$ folgt $y_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Aus $\sinh(x_k)\sin(y_k) = \sinh(x_k)(-1)^k = \dfrac{3}{4}$ folgt

$$x_k = \operatorname{arsinh}\left((-1)^k \frac{3}{4}\right) \iff x_k = (-1)^k \ln 2\ .$$

Abgabe bis: 30.4.15