

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5 : Hausaufgaben

### Aufgabe 1:

- a) Sei  $C$  der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes  $R := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ .

Berechnen Sie : i)  $\int_C \operatorname{Im}(z) dz$ , ii)  $\int_C \frac{z^2}{z+4i} dz$ , und iii)  $\int_C \frac{6z-6}{2z^2-5z+2} dz$ ,

- b) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.

- (i) Seien  $C(t) = 4e^{-it}$ ,  $t \in [-2\pi, 2\pi]$  und  $\tilde{C}$  der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. Dann gilt

$\int_C \frac{3}{z-1} dz = 6\pi i$ .

$\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1} dz = -12\pi i$ .

$\int_C \frac{3}{z-1} dz = -2 \int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1} dz$ .

- (ii) Sei  $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ . Dann gilt

$\int_{C_1} f(z) dz = -2i$  für  $C_1(t) = e^{it}$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$\int_{C_2} f(z) dz = -2i$  für  $C_2(t) = 4 - 4t^2 + it$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

### Aufgabe 2:

- a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}, \quad f_2(z) := \frac{1}{\operatorname{Log}(3-z)}, \quad f_3(z) := \frac{1}{\operatorname{Log}(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für  $k = 1, 2, 3$  (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen  $T_k$  von  $f_k$  mit Entwicklungspunkt Null gegen  $f_k$  konvergiert.

- b) Sei  $C$  eine einfach geschlossene stückweise  $C^1$  Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1} dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

- c) Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$  soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt  $z_0 := x_0 + iy_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe  $|z - z_0| < |z_0|$  gegen  $f(z)$  konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit  $x_0$  möglichst groß wird.

Abgabe bis: 19.6.15