

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

- a) Man bestimme das Bild von

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \ln 4, 0 \leq \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

unter der durch  $f(z) := \sqrt{e^z}$  definierten Abbildung, wobei  $\sqrt{w}$  der Hauptwert der Wurzelfunktion ist.

- b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus  $\ln$  und  $z_1 = -1 + i$  und  $z_2 = i$  berechne man

$$\ln(z_1), \ln(z_2) \text{ und } \ln(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2).$$

#### Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion  $w = f(z) := \frac{1}{2} \left( \frac{z}{3} + \frac{3}{z} \right)$ .

- a) Man bestimme die Bilder

- (i) des Kreises  $|z| = 3$ ,
- (ii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) > 0$ ,
- (iii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0$ .

- b) Man berechne die Umkehrfunktion  $z = f^{-1}(w)$  für  $|z| > 3$ .

### Aufgabe 7:

- a) Die  $\sin$ -Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von  $\sin z$  und bestimme alle Lösungen von  $\sin z = 2$ .

- b) Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 0, z_2 = -2i, z_3 = 1 - i$$

und

$$w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = -1 .$$

- (i) Man berechne die Möbius-Transformation  $T$ , für die mit  $j = 1, 2, 3$  gilt:

$$w_j = T(z_j) .$$

- (ii) Liegen  $z_0 = -1 - i$  und  $z_1, z_2, z_3$  auf einem (verallgemeinerten) Kreis?  
(iii) Liegen  $w_0 = T(z_0)$  und  $w_1, w_2, w_3$  auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

### Aufgabe 8:

Gegeben sei die Abbildung  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit

$$T(z) = \frac{z + 2}{z - 2} .$$

- a) Handelt es sich bei  $T$  um eine Möbius-Transformation?  
b) Man berechne die Umkehrabbildung.  
c) Man bestimme das Bild der reellen Achse.  
d) Man bestimme das Bild des Kreises  $|z| = 2$ .  
e) Man bestimme das Bild der imaginären Achse.  
f) Wohin wird der Halbkreis  $H$  abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

**Abgabetermin:** 30.4.-4.5. (zu Beginn der Übung)