Vo Kompl. Fkt. 9.7.2010

Bemerkung:

Die Fourierkoeffizienten $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ einer periodischen Funktion $f(t)$ bilden das **diskrete Spektrum** von f.

Die Fourier–Transformation $(F(\omega))_{\omega\in\mathbb{R}}$ einer nicht–periodischen Funktion liefert das **kontinuierliche Spektrum**.

Andere Schreibweisen:

$$\mathcal{F}[f](\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Fourier–Transformation und inverse Fourier–Transformation

'Koeff'

'Reihe'

142

$$F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$F[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f'(\tau)}_{u'}\, \underbrace{e^{-i\omega\tau}}_{v}\, d\tau =$$

$$* \quad u = f$$

$$v' = -i\omega\, e^{-i\omega\tau}$$

$$= \underbrace{f(\tau)\, e^{-i\omega\tau} \Big|_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty}}\; - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(-i\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} = 0 \\ \text{falls} \\ \lim_{\tau \to \pm\infty} f(\tau) = 0 \end{array}} + i\omega\, F[f](\omega) =$$

Beispiel:

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

$t \in \mathbb{R}$!

mit den Grenzbedingungen

linear !

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

Man berechnet nun die Fourier–Transformation der DGL:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[y](\omega) &= Y(\omega) \\
\mathcal{F}[y'](\omega) &= -i\omega Y(\omega) \\
\mathcal{F}[y''](\omega) &= -\omega^2 Y(\omega)
\end{aligned}$$

Die Fourier–Transformation der DGL lautet damit:

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

algebraische Gl. !!

und es ergibt sich

$$Y(\omega) = \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b}$$

Daher gilt

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau dt \end{aligned}$$

Rücktransformation ist dargestellt als Faltungsintegral.

Anwendungen der Fourier–Transformation

1) Partielle DGL's: Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad \underline{-\infty < x < \infty,} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

linear!

Fourier–Transformation bezüglich der x–Variablen:

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx$$

Damit folgt für die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t = \cancel{c}(i\omega)^2 U, \qquad t > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ω.

$$-c\omega^2 t + i\omega x = -ct\left(\omega^2 - 2i\frac{\omega x}{2ct} - \frac{x^2}{4c^2t^2}\right) \underbrace{- \frac{x^2}{4ct}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[e^{-c\omega^2 t}] &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c\omega^2 t + i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}
\end{aligned}$$

Aus dem Faltungssatz folgt dann

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[U_0 e^{-c\omega^2 t}] \\
&= u_0 * \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi c t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

Analoge Lösungsdarstellung mit Hilfe der **Greenschen Funktion**.