Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

12. Juni 2009

Reihenentwicklung komplexer Funktionen

Sei f in G analytisch, $K_r = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subseteq G$ und $z_1 \in K_r$. Sei $S_r = \partial K_r$. Unter Verwendung der Cauchy Integralformel erhalten wir wegen $|\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}| < 1$

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\frac{1}{1 - (z_1 - z_0)/(z - z_0)}\,dz\,, \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1 - z_0)^k}{(z - z_0)^k}\,dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}(z_1 - z_0)^k\,dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz)(z_1 - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z_1 - z_0)
\end{aligned}
$$

Satz 10.8: Taylorreihe

Ist $f(z)$ im Gebiet G analytisch und ist $z_0 \in G$, dann gilt für alle $z \in K_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| < r\}$, $K_{z_0,r} \subset G$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ , \ \text{wobei } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz$$

mit S_r als Randkurve von $K_{z_0,r}$. z_0 heißt Entwicklungspunkt der Taylor-Reihe.

Konsequenz: Jede in einem Punkt z_0 differenzierbare komplexe Funktion lässt sich in eine **konvergente** Taylor-Reihe entwickeln.

Konvergenzradius: r so weit vergrößerbar, bis man mit der Kreislinie an einen singulären Punkt von $f(z)$ stößt.

Differenzierbare Funktionen sind, zufolge ihrer Entwickelbarkeit in Potenzreihen, im Konvergenzkreis beliebig oft differenzierbar. Diese Eigenschaft einer differenzierbaren Funktion rechtfertigt erst die Bezeichnung **analytisch**.

Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz

Stellen, an denen komplexe Funktionen nicht definiert sind, heißen **Singularitäten**.

Das Verhalten in der Nähe Singulariäten beschreibt

Satz 10.9 (Laurent-Reihenentwicklung): Sei f auf der offenen Menge G bis auf isolierte Singularitäten analytisch und sei $z_0 \in G$ eine solche, in $K_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset G$ unique Singularität. Dann gilt für alle $z \neq z_0$ aus $K_{z_0,r}$ die Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz.$$

Dabei ist S_r Randkurve von $K_{z_0,r}$.

Residuensatz 10.10

In der Laurententwicklung bei z_0 haängt a_{-1} nicht explizit von z_0 ab. Daher heißt

$$Res(f(z), z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} f(z)\, dz$$

Residuum von f bei z_0. Es gilt der Residuensatz
$f(z)$ sei in G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ analytisch. $B \subset G$ sei ein Bereich mit geschlossener, stückweise glatter Randkurve $K = \partial B$, die sämtliche Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ umschließt. Dann gilt

$$\int_K f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k). \tag{1}$$

Integrationswege: Laurententwicklung (links), Residuensatz (rechts)

Satz 10.11: Residuensatz bei Polstellen

Singularitäten: z_0 heißt

- hebbar, falls in der Laurententwicklung $a_l = 0$ für alle $l \leq 0$ gilt,
- Polstelle $m-$ter Ordnung, falls $a_l = 0$ für alle $l < -m$ und $a_{-m} \neq 0$,
- wesentliche Singularität, falls die Laurententwicklung bei z_0 unendlich viele Koeffizienten mit negativem Index besitzt.

Die Funktion $q(z)$ sei analytisch in einer Umgebung von z_0 mit $q(z_0) \neq 0$. Die Funktion f sei durch

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} \quad (m \in \mathbb{N})$$

erklärt, habe also für $z = z_0$ einen Pol m-ter Ordnung. Dann gilt

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} q^{(m-1)}(z_0) \; .$$

Integralberechnung mit dem Residuensatz I

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine echt gebrochen rationale Funktion mit reellen Polynomen p und q, wobei das Nennerpolynom $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Außerdem gelte für die Polynomgrade $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Die Funktion $f(z)$ besitze die isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_m$ mit jeweils positivem Imaginärteil. Dann gilt die Berechnungsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)\ .$$

Integralberechnung mit dem Residuensatz II

Seien p und q Polynome mit reellen Koeffizienten, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Für die Polynomgrade gelte $grad(q) \geq grad(p) + 1$. Die Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ habe die isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ mit positivem Imaginärteil. Setzt man

$$f(z) = e^{iz} \frac{p(z)}{q(z)} \; ,$$

so gelten die Berechnungsformeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \frac{p(x)}{q(x)} dx = \mathrm{Re}[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)] = -2\pi \mathrm{Im}[\sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \frac{p(x)}{q(x)} dx = \mathrm{Im}[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)] = 2\pi \mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)].$$