

Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



Universität Hamburg

17. April 2009

Buch Kap. 10.4 – Geometrie $\exp z$

Es gilt

$$\exp(D_k) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

wobei für $k \in \mathbb{Z}$

$$D_k := \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, -\pi + 2k\pi < y \leq \pi + 2k\pi\}.$$

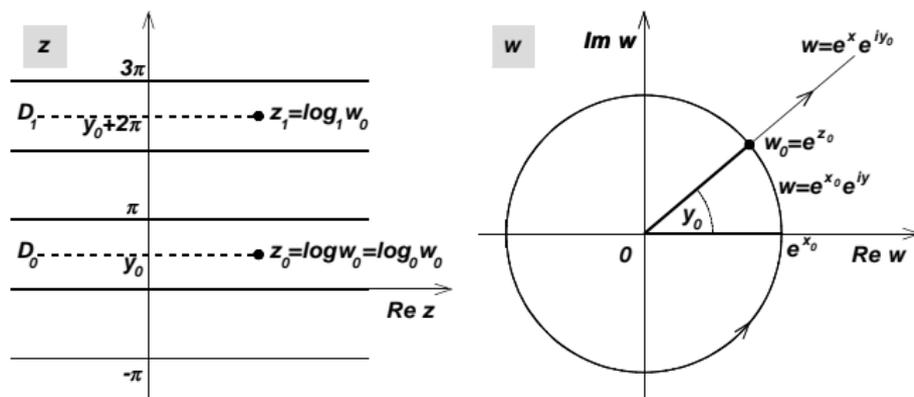


Abbildung 10.4: $w = e^z$

Die Umkehrfunktion

$f(z)$ heißt **eineindeutig (injektiv)**: \Leftrightarrow zu jedem $w \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$.

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereichs genau einmal an.
- Man nennt injektive Funktionen auch **schlicht**.

Beispiele.

- ▶ die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- ▶ die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- ▶ die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

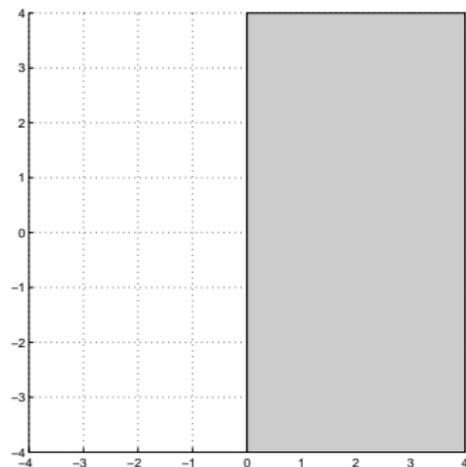
$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

auf der **rechten Halbebene** $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

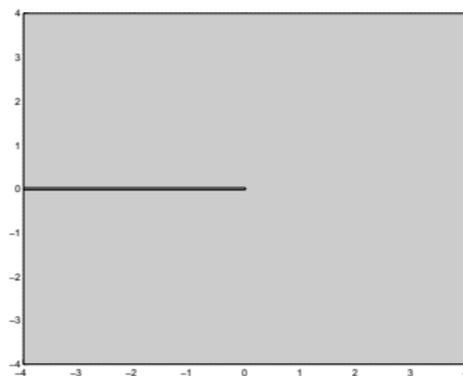
Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

Wertebereich von $z \mapsto z^2$ auf rechter Halbebene



$D(z^2)$: Rechte Halbebene



$W(z^2)$: Aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^-

Umkehrfunktion

Sei f injektiv mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ zu f definiert durch

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(z) &= z && \text{für alle } z \in D(f) \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w && \text{für alle } w \in W(f).\end{aligned}$$

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den Hauptteil der Wurzel $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

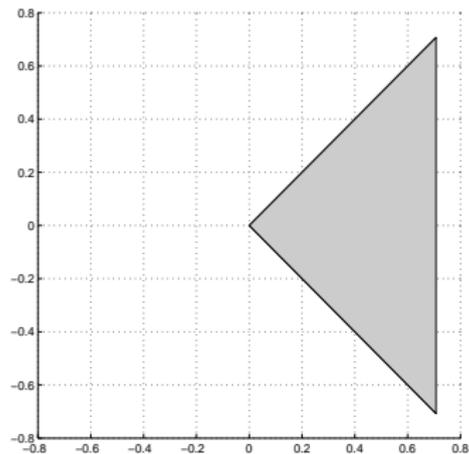
$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

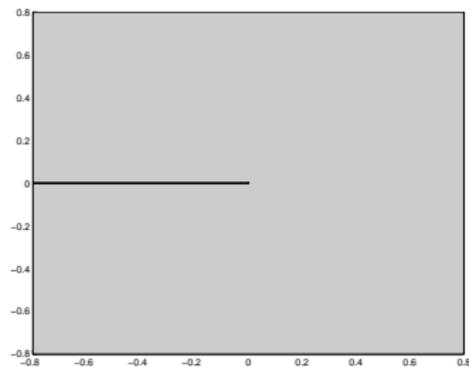
Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \quad \text{für } z = r e^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right).$$

$$z \mapsto z^4$$



$D(z^4)$: Rechtes 4tel



$W(z^4)$: Aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^-

Der komplexe Logarithmus

Ziel: Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Ausgangspunkt: Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \quad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \ln(|z|)$, wobei $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.

Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$.

Menge der Lösungen von $e^w = z$:

$$w = \log(|z|) + i \arg(z),$$

wobei für $\varphi = \arg(z)$ jedes Argument von z in Frage kommt.

Die Menge der Lösungen von $e^w = z$ heißt **komplexer Logarithmus** von z .

Der Hauptwert des Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist auf dem Streifen

$$\mathbf{S} = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist \mathbb{C}^- .

Der einzige Wert von $\mathbf{Log}(z)$, der zu dem Streifen \mathbf{S} gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \quad \text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert des Logarithmus** von z , kurz $\mathbf{Log}(z)$.

Bemerkung: Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene \mathbb{C}^- definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\mathbf{Log}(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\mathbf{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein.

Die allgemeine Potenz

Definition: Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\{\mathbf{a}^{\mathbf{b}}\}$ die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbf{e}^{\mathbf{b}\text{Log}(\mathbf{a})} \quad \text{für } \mathbf{a} \neq 0$$

wobei $\text{Log}(\mathbf{a})$ alle Werte von $\{\ln(|\mathbf{a}|) + i \arg(\mathbf{a})\}$ durchläuft. Somit gilt

$$\{\mathbf{a}^{\mathbf{b}}\} = \left\{ \mathbf{e}^{\mathbf{b}\ln(|\mathbf{a}|) + i\alpha + 2\pi i k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(\mathbf{a})$.

Gilt $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^-$, so enthält die Menge $\{\mathbf{a}^{\mathbf{b}}\}$ den Wert

$$\mathbf{e}^{\mathbf{b}\text{Log}(\mathbf{a})} = \mathbf{e}^{\mathbf{b}(\log(|\mathbf{a}|) + i\alpha)} \quad \text{mit } \alpha = \arg(\mathbf{a}) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert** von $\{\mathbf{a}^{\mathbf{b}}\}$.