3 Möbius-Transformationen

3.1 Die stereographische Projektion

Vorbemerkungen: Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die *Lücken* des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von $q(z)$) dadurch zu schließen, dass man $R(z)$ dort den "Wert" ∞ zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler $p(z)$ dort verschwindet.

Notation: Falls $z^* \in \mathbb{C}$ Nullstelle von q, d.h. $q(z^*) = 0$, und $p(z^*) \neq 0$, so schreibt man $R(z^*) := \infty$, d.h. der Wertebereich von R wird um die "Zahl" ∞ erweitert.

Definition: *In der Erweiterung* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *der komplexen Zahlenebene wird* ∞ *als* `unendlich ferner Punkt` *bezeichnet.* $\square$

Erweiterung der Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$.

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}^*$ werden folgende Rechenregeln (zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in $\mathbb{C}$) vereinbart.

$$\begin{array}{rcll} a + \infty & := & \infty & \text{für } a \in \mathbb{C} \\ a \cdot \infty & := & \infty & \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ a/\infty & := & 0 & \text{für } a \in \mathbb{C} \end{array}$$

Warnung: Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

Topologische Bedeutung: Die erweiterte komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}^*$ ist ein `topologischer Raum`. Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$, gilt

$$z_n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/z_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\mathbb{C}^*$ ist `folgenkompakt`, d.h. *jede* Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird $\mathbb{C}^*$ als `Kompaktifizierung` von $\mathbb{C}$ bezeichnet. $\square$

Die stereographische Projektion.

Definition: *Die* stereographische Projektion *ist diejenige Abbildung* $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ *der* Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ *auf die erweiterte komplexe Ebene* $\mathbb{C}^*$, *die jedem Punkt* $X \in \mathbb{S}^2$, $X \neq N = (0,0,1)^T$, *den Durchstoßpunkt* $P(X)$ *der Geraden durch* X *und* N *durch die* X_1*-*X_2*–Ebene zuordnet, und weiterhin* $P(N) := \infty$.

Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \qquad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

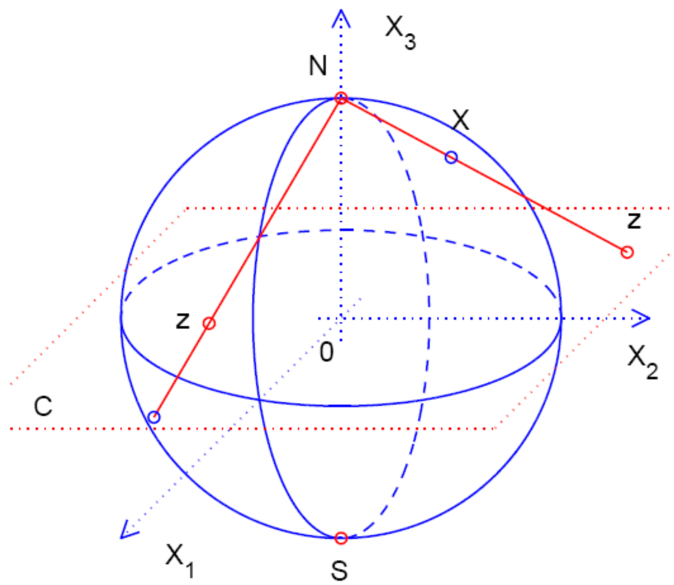
□

Bemerkungen:

- Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$.



- Die obere Hälfte der Sphäre $\mathbb{S}^2$ (die obere Halbkugel) wird durch P auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere Hälfte (untere Halbkugel) wird auf $|z| < 1$ abgebildet. Der Äquator

$$A = \{X \in \mathbb{S}^2 \mid X = (X_1, X_2, 0)^T\}$$

bleibt fest, d.h. jeder Punkt $a \in A$ ist Fixpunkt von P, so dass $P(a) = a$. $\square$

Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem sphärischen Bild U einer Menge $B \subset \mathbb{C}^*$ verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass $P(U) = B$.

Satz: *Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.*

- *Das sphärische Bild einer Geraden in $\mathbb{C}^*$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in $\mathbb{C}^*$ abgebildet.*
- *Das sphärische Bild eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in $\mathbb{C}$ abgebildet.*
- *Die stereographische Projektion ist kreistreu.*

$\square$

3.2 Möbius-Transformationen

Definition: *Eine rationale Abbildung der Form*

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius-Transformation. □

Bemerkungen: Für eine Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$,

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Beachte:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Komposition von Möbius-Transformationen.

Satz: *Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist eine Möbius-Transformation. Genauer gilt:*

$$w = T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{für } ad \neq bc$$

$$u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \textit{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma$$

$$= \frac{Az+B}{Cz+D}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$\square$

Kreistreue von Möbius-Transformationen.

Satz: *Möbius-Transformationen sind* kreistreu, *d.h. (verallgemeinerte) Kreise in $\mathbb{C}^*$ gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.*

Beweis: Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$ eine Möbius-Transformation.

Fall (a): Für $c = 0$ ist T linear und somit kreistreu.

Fall (b): Für $c \neq 0$ zerlegen wir T wie folgt.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass $f(z) = 1/z$ kreistreu ist.

Denn: Dann ist $T(z)$ (als Komposition kreistreuer Abbildungen) kreistreu.

Um zu zeigen, dass f kreistreu ist, wenden wir die (kreistreue!) stereographische Projektion auf $w = 1/z$ an.

Es gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, \frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2$$

Für das Bild von $1/z$ unter P^{-1} bekommen wir somit

$$\begin{aligned} X' &= F(X) = P^{-1}(1/\bar{z}) \\ &= \left(\frac{1/z+1/\bar{z}}{1+(1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z-1/\bar{z}}{i(1+(1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z})-1}{1+(1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\ &= \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, -\frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \\ &= (X_1, -X_2, -X_3)^T \end{aligned}$$

Beachte: $F(X)$ beschreibt eine Drehung um die X_1-Achse um den Winkel π. Die Abbildung $F(X)$ ist offensichtlich kreistreu, und somit ist die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1}$$

kreistreu. ■

Bemerkungen zu Möbius-Tranformationen.

Bemerkung: Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $-d/c$ werden durch T auf Geraden in der w-Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z-Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w-Ebene durch den Punkt a/c abgebildet.
- Kreise, die *nicht* durch den Punkt $-d/c$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die *nicht* durch den Punkt a/c gehen.

□

Doppelverhältnisse und Möbius-Tranformationen.

Satz: *Seien* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ *und* $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ *jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation* $w = \mathrm{T}(z)$, *die die Interpolationsbedingungen*

$$w_j = \mathrm{T}(z_j) \qquad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius-Transformation $\mathrm{T}(z)$ *ist gegeben durch die* `Dreipunkteformel`

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

□

Definition: *Der Ausdruck*

$$\mathrm{D}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das `Doppelverhältnis` *der Punkte* z_0, z_1, z_2, z_3. □

Beispiel.

Gesucht:

Eine Möbius-Transformation $T(z)$ mit $T(1) = i$, $T(i) = -i$ und $T(0) = 0$.

Nach der Dreipunkteformel bekommt man

$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

und somit (durch Auflösen nach w)

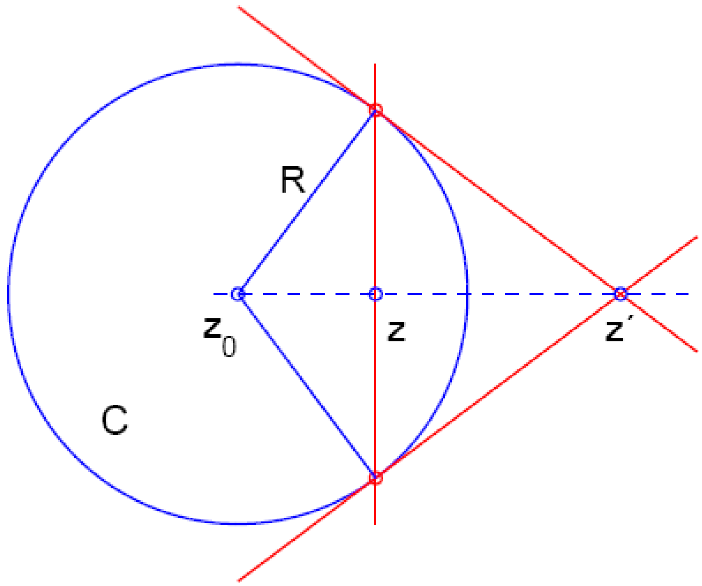
$$w = T(z) = \frac{(1+i)z}{(1+i)z-2i}.$$

Übungsaufgabe:

Überprüfe die Gültigkeit der obigen Interpolationsbedingungen an $T(z)$. □

Symmetrie zum Kreis.

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = R\}$.



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C.

$\square$

Bemerkungen zu Symmetrien zum Kreis.

- Die Abbildung $z \to z'$ heißt `Inversion am Kreis` bzw. `Spiegelung am Kreis`.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

$\square$

Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien.

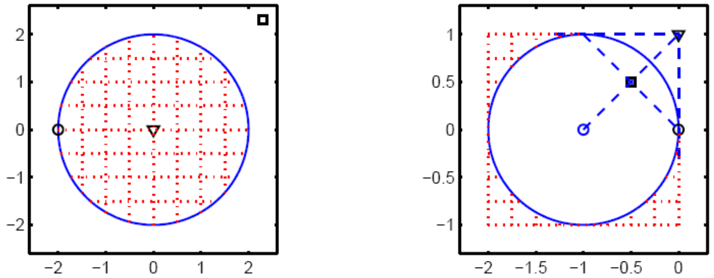
Satz:

Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

Genauer gilt:

Ist C *ein (verallgemeinerter) Kreis in* $\mathbb{C}^*$ *und liegen* z *und* z' *symmetrisch zu* C*, so liegen die Bilder von* z, z' *unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in* $\mathbb{C}^*$*, der das Bild von* C *darstellt.* $\square$

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w+1| = 1$ abbildet mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.



Lösung: $z_2 = 0$ und $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 = T(\infty)$ symmetrisch zum Kreis $|w+1| = 1$ liegen. Somit gilt $(w_2+1)\overline{(w_3+1)} = 1$ und damit $w_3 = 0.5(-1+i)$.

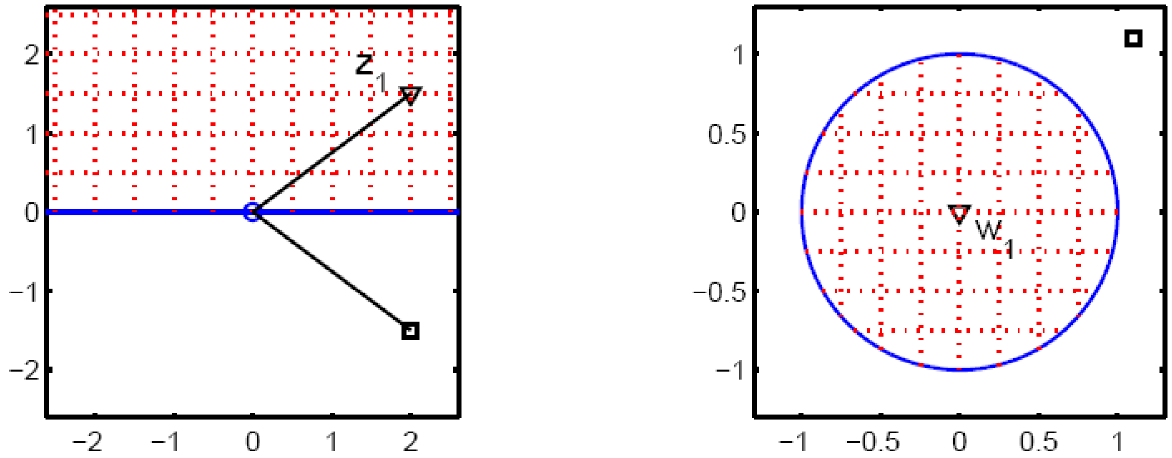
Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\frac{w-0}{w-i} : \frac{w_3-0}{w_3-i} = \frac{z+2}{z-0} : \frac{z_3+2}{z_3-0}\bigg|_{z_3\to\infty},$$

und somit

$$w = T(z) = -\frac{z+2}{(1+i)z+2i}. \qquad \square$$

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die obere Halbebene $\text{Im}(z) > 0$ auf die Kreisscheibe $|w| \le 1$ abbildet und einen gegebenen Punkt z_1 mit $\text{Im}(z_1) > 0$ auf $w_1 = 0$ abbildet.



Lösung: Aus Symmetriegründen muss $z_2 = \overline{z_1}$ auf $w_2 = \infty$ abgebildet werden. Daraus folgt

$$w = c\,\frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}} \qquad \text{mit } |c| = 1.$$

$\square$

Beispiel.

Für $b > a > 0$ betrachten wir die Möbius-Transformation

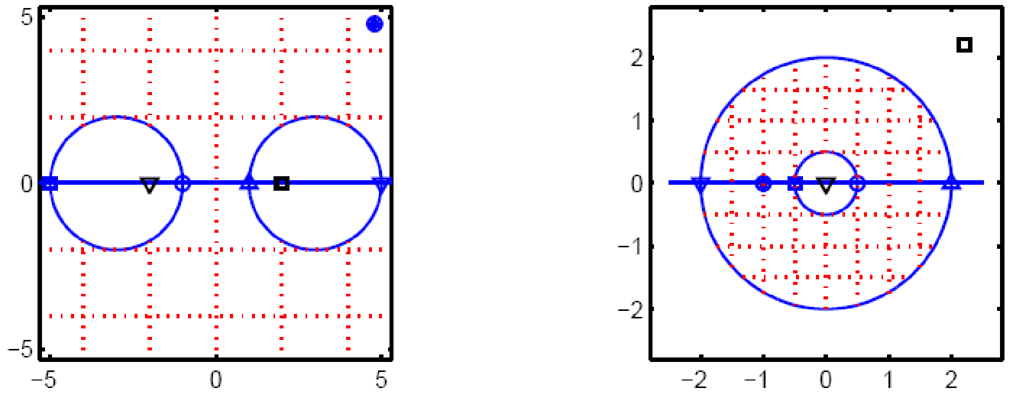
$$w = T(z) = \frac{z+p}{-z+p} \qquad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a,b)$$

Für die folgenden Auswertungen von T bekommen wir

$$\begin{aligned}
z_{1,2} = \pm p \quad &\rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0 \\
z_{3,4} = a, b \quad &\rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} =: \rho > 1 \\
z_{5,6} = -a, -b \quad &\rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\rho} \\
z_{7,8} = 0, \infty \quad &\rightarrow \quad z_{7,8} = 1, -1.
\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Die x-Achse wird durch T auf die u-Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur x-Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur u-Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur x-Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur u-Achse liegen.



Relevante Anwendung: Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet. □