

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6

Aufgabe 21:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

$$\text{a) } \int_{C_k} \frac{\sin(z) + 1}{z - \frac{\pi}{2}} dz \quad k = 1, 2, \quad C_1 : |z| = 1, \quad C_2 : |z - \frac{\pi}{2}| = 2,$$

$$\text{b) } \int_{C_k} \frac{e^{iz^2\pi}}{(z - i)^2} dz \quad k = 1, 2, \quad C_1 : |z| = 2, \quad C_2 : |z| = \frac{1}{2},$$

$$\text{c) } \int_C \frac{z \cos(2z)}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz \quad C : |z - 1| = 1,$$

$$\text{d) } \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^{2n+2}} dz \quad n \in \mathbb{N} \text{ fest.}$$

Aufgabe 22:

a) Sei C der einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Kreis $|z - 2i| = 2$. Berechnen Sie $\int_C \frac{2z}{z^4 - 1} dz$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z - i)}$ einmal mit und einmal ohne Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 23:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen.

a)
$$f(z) = \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-2},$$

b)
$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^2\left(\frac{\pi^2}{4} - z^2\right)},$$

c)
$$f(z) = \frac{\ln(z)}{(z-1)^4} \quad (\text{Tip: Aufgabe 19, Blatt 5}),$$

d)
$$f(z) = \frac{(z^2 + (i-3)z - 3i)(z^2 + (i+3)z + 3i)}{(z-3)^4(z^2+1)}.$$

Aufgabe 24:

Wie viele verschiedene Laurentreihen gibt es für die folgenden Funktionen zu den jeweils angegebenen Entwicklungspunkten z_0 ?

Bestimmen Sie jeweils diejenige Laurentreihe die im Punkt $z = 2$ gegen $f(2)$ konvergiert.

a)
$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-2z-3}, \quad z_0 = 0,$$

b)
$$f(z) = \frac{\sin(z) - 1}{z^2}, \quad z_0 = 0,$$

c)
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}, \quad z_0 = i.$$

Abgabetermin: 19.06.07 bzw. 21.06.07.