Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 17: Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie jeweils die angegebenen Kurven:

$$\int_{C_1} \frac{\ln(z)}{z}\, dz, \qquad C_1 : \text{der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Halbkreis}$$

$$|z| = 1,\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 0$$

$$\int_{C_1+C_2} \mathrm{Re}\,(z)\, dz, \qquad C_1 \text{ wie oben, } C_2 : \text{ die geradlinige Verbindung zwischen i und -i,}$$

$$\int_{C_3} \frac{1}{z}\, dz, \qquad C_3(t) = e^{(1+i)t}, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

$$\int_{C_3+C_4} \frac{1}{z}\, dz, \qquad C_3 : \text{ wie oben, } C_4 : \text{ die geradlinige Verbindung zwischen } e^{2\pi} \text{ und 1.}$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $$\int_{|z|=3} \frac{2z-6}{z^2-6z+8}\, dz\,,$$

b) $$\int_{C_1} \frac{1}{z+2}\, dz \qquad C_1(t) = \tfrac{5}{4}\cos(t) + i\,\tfrac{3}{4}\sin(t)\,, \quad t \in [0, \pi] \qquad \text{(Halbellipse),}$$

c) $$\int_{C_2} \frac{z^3+3z}{z^2+1}\, dz\,,$$

C_2 : der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks $[-2, 2] \times [-3i, 3i]$.

Aufgabe 19: Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\,, \qquad f(z) = \ln(z)\,,$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = i - 1$

a) durch direkte Berechnung der Ableitungen,

b) durch Verwendung der geometrischen Reihe,

und geben Sie deren Konvergenzradius r an. Konvergiert die Reihe für alle z mit $|z - z_0| < r$ gegen $f(z)$?

Hinweis zu b): Bestimmen Sie erst die Taylorreihe von $f'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Aufgabe 20:

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.

a) Sei C eine Kurve mit einem Bildbereich in Form einer (ein mal durchlaufenen) $\infty-$Schlaufe und $I(C)$ der Wert des Integrals

$$I(C) := \int_C \frac{1}{z^2+1} dz.$$

- ☐ $I(C)$ ist stets wohldefiniert.
- ☐ $I(C)$ kann unendlich viele verschiedene Werte annehmen.
- ☐ $I(C)$ kann nur fünf verschiedene Werte annehmen.
- ☐ $I(C)$ kann nur drei verschiedene Werte annehmen.

b) Seien $C(t) = 4e^{-it}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi]$ und $\tilde{C}$ der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. . Dann gilt

- ☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\, dz \;=\; 6\pi i.$
- ☐ $\displaystyle\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1}\, dz \;=\; -12\pi i.$
- ☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\, dz = -2 \int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1}\, dz\,.$

c) Sei $f(z) = \ln(z)$. Dann gilt

- ☐ $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\, dz \;=\; -2i$ für $C_1(t) = e^{it},\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ☐ $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\, dz \;=\; 2i$ für $C_2(t) = e^{it},\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- ☐ $\displaystyle\int_{C_3} f(z)\, dz \;=\; -2i$ für $C_3(t) = 4 - 4t^2 + it,\ t \in [-1, 1]$.

Abgabetermine: 5.06.07, 7.06.07