Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.

a) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$. Dann ist

☐ $f(z) = z^2 + i\,c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

☐ $f(z) = z^2 + i\,c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

☐ f eindeutig gegeben durch $f(z) = z^2$.

b) Die Funktion $f(z) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2 - (\operatorname{Im}(z) + 2)^2$
$+\, i\big[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(z) + 4) \,+\, \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 4)\big]\cdot$

☐ ist nur für $z = 0$ komplex differenzierbar.

☐ ist überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

c) Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen lauten in Polarkordinaten

$$ru_r = v_\phi\,, \qquad rv_r = -u_\phi.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Dann sind die Funktionen $f_k : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$,

$$f_k(z) := f_k(re^{i\phi}) := \frac{1}{k}\ln(r^n) + i\varphi \qquad \phi \in (-\pi, \pi)$$

☐ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ analytisch.

☐ für genau ein $k \in \mathbb{N}$ analytisch.

d) Es sei $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = 3x^2 - y^2$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.

☐ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten v so zu wählen, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch wird.

☐ Es gibt keine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion f mit dem angegebenen Realteil u.

☐ Es gibt unendlich viele Möglichkeiten v so zu wählen, dass f für alle $z = x+iy$ mit $x = 0$ komplex differenzierbar wird.

Aufgabe 14:

Die ebene Umströmung eines Zylinders mit der Querschnittsfläche

$$K := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z + \frac{i}{2}| \le 1 \text{ und } |z - \frac{i}{2}| \le 1\}$$

soll für ein stationäres, wirbel– und quellenfreies Geschwindigkeitsfeld u : $\mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}^2$ durch die Rückführung des Problems auf die Umströmung eines Kreiszylinders mit Radius 1 untersucht werden. Geben Sie eine Abbildung an, die das Äußere von K bijektiv und konform auf das Äußere des Einheitskreises abbildet.

Aufgabe 15: Gegeben sei eine ebene Strömung um das elliptische Profil

$$\frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \le 1\,.$$

mit der Geschwindigkeit $V \in \mathbb{R}^+$ im Unendlichen. Bestimmen Sie ein Potential der Strömung und die Geschwindigkeit in den Punkten $\left(\pm\frac{5}{4}, 0\right)$ und $\left(0, \pm\frac{3}{4}\right)$.

Hinweise : Es genügt das Potential in Abhängigkeit von z anzugeben. Als Modellproblem kann die Umströmung eines Kreisprofils verwendet werden (Vorlesung Folien 79-82)

Aufgabe 16:

Gegeben sei ein hohler, sehr langer Kreiszylinder vom Radius 1. Die obere und die untere Hälfte seien voneinander elektrisch isoliert. Die obere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = 100$ V und die untere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = -100$ V. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems ergibt sich auf dem Schnitt des Zylinders mit der komplexen Zahlenebene :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x + iy| = 1\,,\ y > 0,\\ \Phi(z) &= -100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x + iy| = 1\,,\ y < 0\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke im Zylinder.

Hinweise : Transformieren Sie den Einheitskreis auf einen Sektor. Bei vernünftiger Transformation hängen die Randdaten in der Modellebene nur vom Winkel ab. Verwenden Sie in der Modellebene die Potentialgleichung in Polarkoordinaten

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\Psi + r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\,\Psi + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\,\Psi = 0$$

unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der Randdaten.

Abgabetermin: 15.05.07