**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2007**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 3

**Aufgabe 9:** Bei der Lösung eines Strömungungsproblems über eine Mauer taucht die folgende Aufgabe auf:

Die zwischen $z = 0$ und $z = 2i$ geschlitzte obere $z$-Halbebene

$$z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\ ,\ z \notin \{i\alpha; \alpha \in [0, 2]\}$$

soll auf den Bereich $\mathrm{Im}\,(w) > 0$ abgebildet werden.

Zeigen Sie, dass ein Zweig der Funktion $f : z \to \sqrt{z^2 + 4}$ das gewünschte leistet. Klären Sie insbesondere wie die Definitionsbereiche der Abbildungen $s : z \to z^2$ bzw. $q : z \to \sqrt{z}$ zu wählen sind.

Welches Urbild besitzt der Strahl $w = iv,\ v \in (0, \infty)$?

**Aufgabe 10:** Gegeben sei die stereographische Projektion

$$\mathbb{C}^* \to K \subset \mathbb{R}^3, \qquad z = x + iy \mapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) =: Z$$

Die Punkte der Bildmenge können natürlich auch in Kugelkoordinaten angegeben werden. Wegen $r = 1$ genügen dann zwei Parameter $\phi$ (Längengrad) und $\theta$ (Breitengrad) zur eindeutigen Festlegung eines Bildpunktes.

a) Welche Punkte aus $\mathbb{C}^*$ werden auf einen festen Längengrad ($\phi$ konstant) abgebildet?

b) Welche Punkte aus $\mathbb{C}^*$ werden auf einen festen Breitengrad ($\theta$ konstant) abgebildet?

**Aufgabe 11:** Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) ☐ Wie im $\mathbb{R}^2$ gibt es auch in $\mathbb{C}$ zu je zwei Parallelogrammen $P_1$ und $P_2$ eine affin–lineare Abbildung, die $P_1$ in $P_2$ überführt.

☐ Für beliebige von Null verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2$ gilt:

$$e^{(z_1)} \cdot e^{(z_2)} = e^{(z_1 + z_2)}.$$

☐ Für beliebige von Null verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2$ gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 \cdot z_2).$$

b) Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $T(z) = \frac{z-3i}{z+3i}$ .

☐ T definiert eine Möbius–Transformation.

☐ Die Umkehrabbildung von $T$ ist gegeben durch $z = T^{-1}(w) = \frac{z+3i}{z-3i}$.

☐ Das Bild der imaginären Achse ist ein echter Kreis.

☐ Das Bild der imaginären Achse ist die imaginäre Achse.

☐ Das Bild des Kreises $|z| = 3$ ist die imaginäre Achse.

☐ Das Bild der reellen Achse ist ein echter Kreis mit Mittelpunkt $M = 0$.

☐ Die halbe Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3;\ Re(z) > 0\}$ wird durch $T$ auf den Sektor $S := \{z \in \mathbb{C} : arg(z) \in ]\pi/2, \pi[\}$. abgebildet.

**Aufgabe 12:** (Klausur 05/06, Prof. Oberle) Gegeben sei die Funktion

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*\,, \quad T(z) = \frac{3z - i}{iz - 1}\,.$$

a) Ist $T$ eine Möbius-Transformation?

b) Welche verallgemeinerten Kreise werden durch $T$ auf Geraden abgebildet?

c) Welches ist das Bild der imaginären Achse?

d) Welches ist das Bild der reellen Achse?

e) Wie sieht die Bildmenge von

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

unter $T$ aus? Zeichnen Sie dazu eine Skizze!

**Abgabetermin:** 03.05.07

**Terminverschiebung :** Als Ersatz für die Gruppen, die am 1.5. ausfallen, findet eine Übung am Donnerstag den 3.5. im Raum 1520, DE15 von 12.15 Uhr bis 13.45 Uhr statt.