

Komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1 : Präsenzaufgaben 3.4 bzw. 5.4.2007

Aufgabe 1:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) an und skizzieren Sie die zugehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene.

$$z_0 = 2, \quad z_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = \sqrt{2}(-1+i), \quad z_4 = -2, \text{ bzw. } z_k = i^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 2:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten ($z = x + iy$) an und skizzieren Sie die zugehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene.

$$z_k = e^{ik\pi} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \bar{z} = -2 \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2.$$

Aufgabe 3:

Charakterisieren Sie durch eine Skizze oder mit Worten die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene, und bestätigen Sie anschließend ihre Überlegungen analytisch. Hinweis : Es gilt $|z|^2 = x^2 + y^2$.

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\},$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 2i| < 1\},$$

$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = |z + 1 - i|\},$$

$$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = |z - 1|\},$$

$$M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 1\}.$$

Aufgabe 4:

- a) Seien $c = a + ib$ und $d = \alpha + i\beta$ feste Zahlen aus \mathbb{C} . Veranschaulichen Sie sich folgende komplexe Abbildungen geometrisch.

$$\begin{array}{ll} v & : \quad z \mapsto z + d, & R & : \quad z \mapsto c \cdot z, \\ l & : \quad z \mapsto c \cdot z + d, & k & : \quad z \mapsto \bar{z}, \\ m & : \quad z \mapsto \sqrt{z \cdot \bar{z}}, & r & : \quad z \mapsto \frac{1}{z}. \end{array}$$

- b) Berechnen Sie alle Lösungen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^z = 2$.