

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6, Präsenzaufgaben

#### Aufgabe 1:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel von d'Alembert

$$\hat{u}(x, t) = \frac{1}{2} (g(x + ct) + g(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\alpha) d\alpha$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung

$$\hat{u}_{tt} - c^2 \hat{u}_{xx} = 0, \quad \hat{u}(x, 0) = g(x), \quad \hat{u}_t(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c > 0.$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} f(\omega, \tau) d\omega d\tau \quad (1)$$

löst die folgende Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = f(x, t) \quad \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_t(x, 0) = 0. \quad (2)$$

(Beweis: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 6x \sin t, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}, & u_t(x, 0) &= \sin(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3)$$

a) Berechnen Sie eine Lösung  $\hat{u}$  der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \hat{u}(x, 0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}, & \hat{u}_t(x, 0) &= \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie eine Lösung  $\tilde{u}$  der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} &= 6x \sin t, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \tilde{u}(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, & \tilde{u}_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- c) Zeigen Sie durch Einsetzen von  $u$  in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass  $u = \tilde{u} + \hat{u}$  die Anfangswertaufgabe (3) löst.

**Lösung:**

- a) Lösung der homogenen Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten nach d'Alembert

$$\hat{u}(x, t) = \frac{1}{2} (x + 2t + x - 2t) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \sin(\eta) d\eta = x + \frac{1}{2} \sin(x) \sin(2t)$$

- b) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)} 6\omega \sin(\tau) d\omega d\tau = \frac{3}{4} \int_0^t \sin(\tau) [\omega^2]_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)} d\tau \\ &= \frac{3}{4} \int_0^t \sin(\tau) (-8x(\tau-t)) d\tau = 6x \int_0^t t \sin(\tau) - \tau \sin(\tau) d\tau \\ &= 6xt(1 - \cos(t)) + 6x [\tau \cos(\tau)]_0^t - 6x \int_0^t \cos(\tau) d\tau = 6x(t - \sin t). \end{aligned}$$

- c) Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:

$$u(x, t) = 6x(t - \sin t) + x + \frac{1}{2} \sin(x) \sin(2t)$$

**Probe:**

$$u(x, 0) = 6x(0 - \sin(0)) + x + \frac{1}{2} \sin(x) \sin(0) = x,$$

$$u_t(x, t) = 6x(1 - \cos(t)) + 0 + \frac{1}{2} \sin(x) 2 \cos(2t) = 6x(1 - \cos(t)) + \sin(x) \cos(2t)$$

$$u_t(x, 0) = 6x(1 - \cos(0)) + \sin(x) \cos(0) = \sin(x)$$

$u_{xx} = 0 + 0 - \frac{1}{2} \sin(x) \sin(2t)$  (da die ersten beiden Summanden von  $u$  linear in  $x$  sind, muss man nur den Sinus-Term zwei Mal ableiten).

$$u_{tt} = 6x \sin t - 2 \sin(x) \sin(2t)$$

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6x \sin t - 2 \sin(x) \sin(2t) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin(x) \sin(2t)\right) = 6x \sin t.$$

**Aufgabe 2:** (Anschlagen einer Saite)

Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} && \text{für } 0 < x < 1, t > 0, \\
u(0, t) &= u(1, t) = 0 && \text{für } t > 0, \\
u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 < x < 1, \\
u_t(x, 0) &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

**Tipp:** Vorlesung Seite 150.

Als Lösung erhalten Sie eine Reihe. Plotten Sie die Partialsumme der ersten 20 nicht verschwindenden Summanden dieser Reihe für  $c = 2$ ,  $x \in [0, 1]$  und  $t \in [0, 0.4]$  bzw.  $t \in [0, 2]$ .

**Lösung:**

Aus der Vorlesung (Seite 150) kennen wir die Lösungsdarstellung:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)) \cdot \sin(k\omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{L} = \pi.$$

Zu erfüllen bleiben die Anfangsbedingungen. Die erste lautet

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(0) + B_k \sin(0)) \cdot \sin(k\omega x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) = 0 \quad x \in [0, 1]$$

Hieraus erhält man  $A_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Die zweite Anfangsbedingung lautet dann:

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} ck\pi B_k \cdot \sin(k\pi x) = v_0(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von  $v_0$ :

$$b_k = 2 \int_0^1 v_0(x) \sin(k\pi x) dx = 2 \int_{\frac{1}{20}}^{\frac{1}{10}} \sin(k\pi x) dx = \frac{2}{k\pi} \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{20}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{10}\right) \right]$$

Mit  $B_k = \frac{b_k}{ck\pi}$  folgt

$$u(x, t) = \frac{2}{c\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{20}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{10}\right) \right] \sin(ck\pi t) \cdot \sin(k\pi x)$$

