Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, && \text{auf } \mathbb{R}^2\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(4\pi x) && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösung, die man mit der Formel von d'Alembert erhält für $t = 0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\,.$

Lösung:

a) Lösung nach d'Alembert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin\left(4\pi(x+t)\right) + \sin\left(4\pi(x-t)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-t}^{x+t} \cos(\pi\eta)d\eta \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \left.\frac{\sin(\pi\eta)}{2\pi}\right|_{x-t}^{x+t} \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \frac{1}{2\pi}\left(\sin\left(\pi(x+t)\right) - \sin\left(\pi(x-t)\right)\right) \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\pi x\right)\cdot\sin\left(\pi t\right)\right). \end{aligned}$$

b) Nach d'Alembert gilt $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(u_0(x+3t) + u_0(x-3t)\right)$, wobei

$$u_0(x+3t) = \begin{cases} 2 & -1-3t \le x \le 1-3t\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$u_0(x-3t) = \begin{cases} 2 & -1+3t \le x \le 1+3t\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also erhalten wir für $-1+3t \le 1-3t \iff t \le \frac{1}{3}$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < -1-3t, \\ 1 & -1-3t \le x < -1+3t, \\ 2 & -1+3t \le x \le 1-3t, \\ 1 & 1-3t < x \le 1+3t, \\ 0 & 1+3t < x. \end{cases}$$

Zum Beispiel erhält man für $t = 1/6$:
$x - 3t = x - 0.5 \in [-1,1] \iff x \in [-0.5, 1.5]$ und
$x + 3t = x + 0.5 \in [-1,1] \iff x \in [-1.5, 0.5]$

$$u(x,\frac{1}{6}) = \begin{cases} 0 & x < -1.5, \\ 1 & -1.5 \le x < -0.5, \\ 2 & -0.5 \le x \le 0.5, \\ 1 & 0.5 < x \le 1.5, \\ 0 & 1.5 < x. \end{cases}$$

Analog berechnet man die Lösung für $t = \frac{1}{3}$

$$u(x,\frac{1}{3}) = \begin{cases} 0 & x < -2, \\ 1 & -2 \le x < 0, \\ 2 & 0 \le x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 2, \\ 0 & 2 < x. \end{cases}$$

Für $t > \frac{1}{3}$ gilt $1-3t < -1+3t$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < -1-3t, \\ 1 & -1-3t \le x < 1-3t, \\ 0 & 1-3t \le x \le -1+3t, \\ 1 & -1+3t < x \le 1+3t, \\ 0 & 1+3t < x. \end{cases}$$

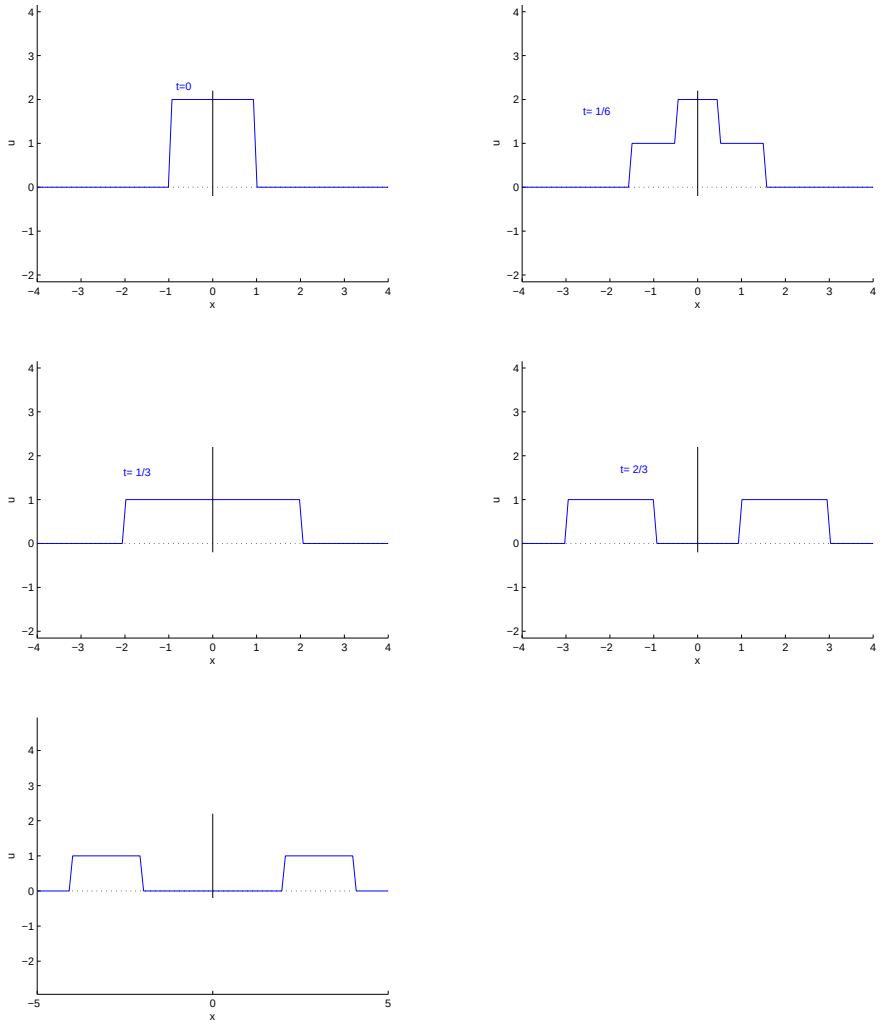
und damit

$$u(x,\frac{2}{3}) = \begin{cases} 0 & x < -3, \\ 1 & -3 \le x < -1, \\ 0 & -1 \le x \le 1, \\ 1 & 1 < x \le 3, \\ 0 & 3 < x. \end{cases}$$

sowie

$$u(x,1) = \begin{cases} 0 & x < -4, \\ 1 & -4 \le x < -2, \\ 0 & -2 \le x \le 2, \\ 1 & 2 < x \le 4, \\ 0 & 4 < x. \end{cases}$$

Anschaulich zerfällt die ursprüngliche (eckige) Welle in zwei Wellen, die in entgegengesetzte Richtungen laufen.



Aufgabe 2:

Gesucht ist eine Näherung für die Lösung des folgenden Problems

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} && x \in (0, 2\pi),\ t > 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \\
&u_t(x,0) = 0 && x \in (0, 2\pi)\\
&u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 && t > 0
\end{aligned}
$$

Skizzieren Sie die 2π periodische Fortsetzung der Anfangsdaten für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

Bestimmen Sie eine Näherung $\tilde{u}$ für die Lösung u der Aufgabe indem Sie die auftretenden Fourier-Reihen nach dem dritten Term abbrechen. Prüfen Sie nach, welche Rand– bzw. Anfangsbedingungen bereits durch diese Näherungslösung erfüllt wird.

Lösung:

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)}$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{2\pi}$ und $c = 1$. Also

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(\frac{k}{2}\, t) + B_k \sin(\frac{k}{2}\, t)\right) \cdot \sin(\frac{k}{2}\, x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} \left(-A_k \sin(0) + B_k \cos(0)\right) \cdot \sin(\frac{k}{2}\, x) \stackrel{!}{=} 0 \implies B_k = 0\,,\ \forall k$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_K \cos(\frac{k}{2}\, t) \sin(\frac{k}{2}\, x)$$

$$\text{mit } u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_K \sin(\frac{k}{2}\, x) \stackrel{!}{=} \begin{cases} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

Also:

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\sin(\frac{k}{2}\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin(\frac{k}{2}\,x)\,dx \;+\; \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi-x)\sin(\frac{k}{2}x)\,dx \;+\; \int_{3\pi/2}^{2\pi}(x-2\pi)\sin(\frac{k}{2}x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(\frac{k}{2}x)}{\frac{k}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2}\frac{2}{k}\cos(\frac{k}{2}x)\;dx\right. \\
&+ \left[-(\pi-x)\frac{2}{k}\cos(\frac{k}{2}x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[(\frac{2}{k})^2\sin(\frac{k}{2}x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&- \left.\left[(x-2\pi)\frac{2}{k}\cos(\frac{k}{2}x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \left[(\frac{2}{k})^2\sin(\frac{k}{2}x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{8}{\pi k^2}\left(\sin(\frac{k\pi}{4}) - \sin(\frac{3k\pi}{4})\right).
\end{aligned}
$$

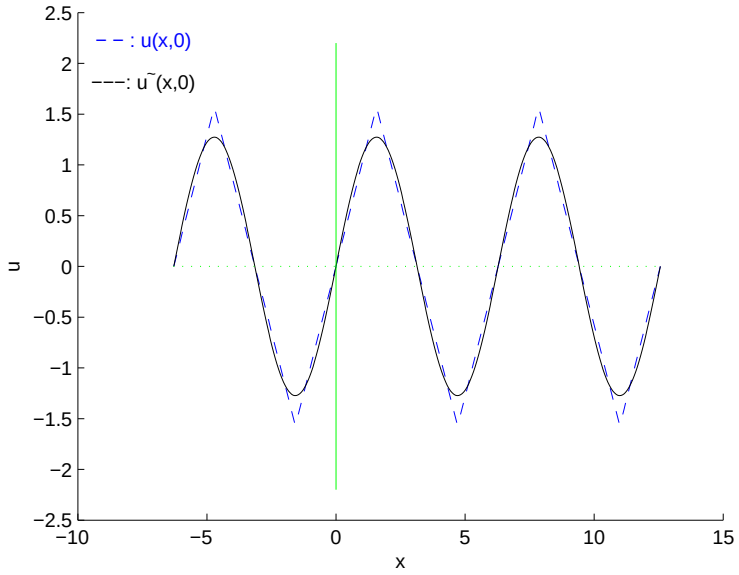
Die ersten drei Koeffizienten lauten

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{8}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{3\pi}{4})\right) \;=\; 0, \\
A_2 &= \frac{8}{4\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{3\pi}{2})\right) \;=\; \frac{4}{\pi}, \\
A_3 &= \frac{8}{9\pi}\left(\sin(\frac{3\pi}{4}) - \sin(\frac{9\pi}{4})\right) \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Die Approximation mit den ersten drei Termen ist gegeben durch

$$\tilde{u}(x,t) = u_3(x,t) = \frac{4}{\pi}\cos(t)\sin(x).$$

Es ist $u_3(x,0) = \dfrac{4}{\pi}\sin(x)$. Die Anfangsbedingung für u ist also nur näherungsweise erfüllt (siehe Plot). Die zweite Anfangsbedingung ist, ebenso wie die Randbedingungen erfüllt. Was die Randbedingungen angeht, wäre alles andere auch ein sicherer Hinweis auf einen Rechenfehler!


– – : u(x,0)
———: u˜(x,0)
u
x
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−10
−5
0
5
10
15

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\ t > 0,\\
&u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3), \qquad (1)\\
&u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0,\\
&u(3,t) = 1 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe durch die Einführung einer geeigneten Funktion v in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen für v.

Geben Sie die Differentialgleichung für v und die Anfangsbedingungen für v an.

Lösung:

Mit $v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$ gilt

$u_t = v_t - e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad u_{tt} = v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad v_{xx} = u_{xx}.$

Die Differentialgleichung für lautet dann

$v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) - 4v_{xx} = e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) \iff v_{tt} - 4v_{xx} = 0\,.$

Als Anfangs- und Randwerte für v erhalten wir:

$v(x,0) = u(x,0) - e^0 - \frac{x}{3}(1 - e^0) = 1 + 2\sin(\pi x) - 1 = 2\sin(\pi x),$

$v_t(x,0) = u_t(x,0) + e^0 - \frac{x}{3} \cdot e^0 = 1,$

$v(0,t) = v(3,t) = 0\,.$