**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 5, Präsenzaufgaben

**Aufgabe:** (Vgl. Vorlesung Seite 85-90)

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
& u_t - u_{xx} = e^{-t}\sin(2x) + 1 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\
& u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\
& u(0,t) = f(t) = t && t \in \mathbb{R}^+ \\
& u(\pi,t) = g(t) = t && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}$$

a) Homogenisieren Sie zunächst die Randbedingungen, indem Sie die Funktion

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[ f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

mit $L = \pi$ einführen und in der Aufgabenstellung die $u$–Ausdrücke durch geeignete $v$–Ausdrücke ersetzen.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung

$$\begin{aligned}
& v^*_t - v^*_{xx} = 0 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\
& v^*(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\
& v^*(0,t) = v^*(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}$$

c) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
& v^{**}_t - v^{**}_{xx} = e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\
& v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,\pi)\,, \\
& v^{**}(0,t) = v^{**}(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}$$

mit Hilfe des Ansatzes

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\sin(kx)\,, \qquad a_k(0) = 0$$

d) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für $u$ an.

**Lösung:**

a) Mit $\quad v(x,t) = u(x,t) \; - \; t \; - \; \dfrac{x-0}{\pi - 0}(t-t) \; = \; u(x,t) \; - \; t$

oder $u(x,t) = \; v(x,t) + t$ erhalten wir

$u_t = v_t + 1, \quad u_{xx} = v_{xx}\,.$ Neue DGL:

$v_t + 1 - v_{xx} = e^{-t}\sin(2x) + 1 \iff \boxed{v_t - \; v_{xx} \; = \; e^{-t}\sin(2x).}$

Anfangswerte: $v(x,0) = u(x,0) - 0 \overset{!}{=} \dfrac{1}{2}\sin(2x) \qquad x \in (0,\pi)\,.$

Randwerte : $v(0,t) \; = \; v(\pi,t) \; = \; t - t = 0 \quad .$

b) Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randdaten, $c = 1$ und vorgegebenen Anfangswerten

$$v^*(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad x \in (0,\pi)\,.$$

Die Formel aus Seite 90 der Vorlesung lautet:

$$v^*(x,t) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-k^2 t}\sin(kx).$$

Zu erfüllen ist:

$$v^*(x,0) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \; = \; \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$a_2 \; = \; \frac{1}{2} \qquad$ und $\qquad a_k = 0$ sonst. Also

$v^*(x,t) \; = \; \dfrac{1}{2}\, e^{-4t}\sin(2x)\,.$

c) Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned}
&v_t^{**} - v_{xx}^{**} = e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, t \in \mathbb{R}^+,\\
&v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,\pi)\,,\\
&v^{**}(0,t) = v^{**}(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}$$

Ansatz:

$$v^{**}\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\sin(kx)\,.$$

Die Anfangsbedingung

$$v^{**}\,(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\sin(kx) \; = \; 0$$

liefert $\qquad a_k(0) = 0\,.$

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\dot{a}_k(t) + k^2 a_k(t)\right]\sin(kx) \; = \; e^{-t}\sin(2x).$$

Damit erhalten wir $a_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 2$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot{a}_2(t) + 4a_2(t) \;=\; e^{-t}$$

für $a_2$. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$a_{2,h}(t) = Ce^{-4t}$$

Der Ansatz $a_{2,p}(t) = C(t)e^{-4t}$ für eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung liefert

$$\dot{C}(t)\, e^{-4t} \;=\; e^{-t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(t) = c + \frac{1}{3}\, e^{3t}$$

Mit der Wahl $c = 0$ ergibt sich $a_{2,p}(t) = \dfrac{1}{3}\, e^{3t}e^{-4t} = \dfrac{1}{3}\, e^{-t}$

und damit

$$a_2(t) = c\, e^{-4t} + \frac{1}{3}\, e^{-t} \qquad \text{und mit } a_2(0) = 0 \text{ folgt } c = -1/3$$

$$\Longrightarrow a_2(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)$$

$$\Longrightarrow v^{**}(x,t) = a_2(t)\, \sin(2x) = \frac{1}{3}\,\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)\, \sin(2x).$$

d) Superposition liefert mit den Bezeichnungen aus a), b) und c)

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t) = \frac{1}{6}\left(2e^{-t} + e^{-4t}\right)\sin(2x)$$

und

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + t \;=\; \frac{1}{6}\left(2e^{-t} + e^{-4t}\right)\sin(2x) \;+\; t\,.$$