

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Lösen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die folgende Dirichlet Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 & 0 \leq r < 3 \\ u(3, \varphi) &= \cos^2(\varphi) & \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipps:

- Vgl. Vorlesung Seite 85-88.
- Verwenden Sie für die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung $r^2 \cdot w''(r) + ar \cdot w'(r) + b \cdot w(r) = 0$ den Ansatz $w(r) = r^k$.
- Es gilt: $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\varphi))$.

Lösung:

Der Produktansatz: $u = w(r) \cdot v(\varphi)$ ergibt eingesetzt in die Laplacegleichung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \\ r^2 w'' v + r w' v + w v'' &= 0 \implies \frac{r^2 w'' + r w'}{w} = -\frac{v''}{v} = \lambda \end{aligned}$$

Die Lösungen von $v''/v = -\lambda$ hängen zwar von dem Vorzeichen von λ ab (vgl. Vorlesung Seite 88), hier kommen aber nur 2π periodische Lösungen in Frage:

$$v_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi), \quad \lambda = k^2 \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Für w erhalten wir dann die (Eulersche) Differentialgleichung

$$r^2 w'' + r w' - k^2 w = 0$$

$k = 0$: $r^2 w''(r) + r w'(r) = 0$. Erhalte wie in der HÜ für $g := w'$

$$r g'(r) + g(r) = 0 \iff r \cdot \frac{dg}{dr} = -g \iff \frac{dg}{g} = -\frac{dr}{r}$$

$$w' = g = \frac{d_0}{r} \implies \boxed{w_0 = a_0 + b_0 \ln(r) .}$$

$k \neq 0$: Eulersche Dgl.: $r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$

Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

$$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$$

$$\iff r^\gamma (-k^2 + \gamma + \gamma^2 - \gamma) = 0 \iff \gamma = \pm k$$

und damit $\boxed{w_k(r) = a_k r^{-k} + b_k r^k}$

Da die Lösungen in einem Kreis um Null definiert sein sollen, also insbesondere beschränkt bleiben sollen, kommen die negativen Potenzen und der $\ln$ -Term nicht in Frage.

Insgesamt erhalten wir die Lösungen:

$$u_0(r, \phi) = c_0, \quad u_k(r, \phi) = (c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)) r^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei jede Linearkombination dieser Lösungen wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$u(r, \phi) = c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)) r^k .$$

Die Randdaten liefern noch die Bedingung

$$\begin{aligned} u(3, \phi) &= c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)) 3^k \\ &= \cos^2(\phi) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\phi)) . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{18} \cos(2\phi) .$$

Aufgabe 2:

- a) Leiten Sie mit Hilfe eines Produktansatzes eine Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

- b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $h(x) = 3 + 4 \cos(2\pi x)$.

Lösung:

- a) Der Ansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert:

$$v'' = -\lambda v, \quad \dot{w} = -\lambda w, \quad v'(0) = v'(1) = 0.$$

Fallunterscheidung unter der Voraussetzung, dass h nicht identisch Null ist:

$$\lambda = 0 \implies v(x) = a_0 + b_0 x, \quad v' = b_0 = 0$$

$$\implies v_0(x) = a_0.$$

$$\lambda < 0 \implies v(x) = a e^{\sqrt{-\lambda}x} + b e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$v'(0) = 0 \iff a = b$$

$$v'(1) = 0 \iff a\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0$$

$$\iff (u \equiv 0) \vee (e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \iff \lambda = 0) \quad \text{Widerspruch !}$$

$$\lambda > 0 \implies v(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$v'(x) = (\sqrt{\lambda})(-a \sin(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x))$$

$$v'(0) = 0 \iff b = 0$$

$$v'(1) = 0 \iff (u \equiv 0) \vee (\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \iff \lambda_k = k^2 \pi^2).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Zeitkomponente rechnet man leicht nach

$$w_k(t) = e^{-k^2 \pi^2 t}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Als Reihendarstellung für die Lösung hat man also

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 \pi^2 t} \cos(k\pi x).$$

Zu erfüllen:

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man bei allgemeinem h die Daten gerade und 2-periodisch fort und bestimmt die Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2 \int_0^1 h(x) \cos(k\pi x) dx.$$

Dazu mehr auf den Blättern 6.

b) Für $h(x) = 1 + \cos(2\pi x)$ liest man aus der Bedingung

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x) \stackrel{!}{=} 3 + 4 \cos(2\pi x)$$

unmittelbar ab, dass man mit $a_0 = 6$, $a_2 = 4$, $a_k = 0$ sonst die Lösung

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + a_2 e^{-2^2 \pi^2 t} \cos(2\pi x) = 3 + 4e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x)$$

für die Anfangsrandwertaufgabe erhält

Abgabe bis 27.06.2025