**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 4, Präsenzaufgaben

**Aufgabe 1:** Tipp: Vorlesung Seite 47-53

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = \ 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 2xe^{-x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in Matrixschreibweise.

b) Führen Sie die Substitution $\alpha = x + \frac{t}{4},\, \mu = x - t$ durch und geben Sie die Differentialgleichung in Matrixschreibweise für $v(\alpha\,,\mu) := u(x,t)$ an.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung. Bestimmen Sie dazu $\boldsymbol{v}$ und führen Sie die Rücksubstitution durch.

d) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe.

**Lösung:**

a) Matrixschreibweise: $(\nabla^T \boldsymbol{A}\, \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h\,.$

Hier

DGL: $$(\nabla^T A \nabla)u \ = \ \nabla^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \nabla \cdot u = \mathbf{0}$$

b) Mit $S^T := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt für $\boldsymbol{v}$ die Differentialgleichung

$$\nabla_{\alpha\mu}^T\, \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{S}\, \nabla_{\alpha\mu}\, v = \mathbf{0}.$$

wobei $$\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{8} \\ \frac{25}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Für $\boldsymbol{v}$ erhält man also die Differentialgleichung

$$\nabla_{\alpha\mu}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{S}\, \nabla_{\alpha\mu}\, v = (\tfrac{\partial}{\partial\alpha},\, \tfrac{\partial}{\partial\mu}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{8} \\ \frac{25}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} \end{pmatrix} v = \tfrac{25}{4} v_{\alpha\mu} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{v_{\alpha\mu} = 0}$$

c) Lösung der Differentialgleichung für $v$

Aus $(v_\alpha)_\mu = 0$ folgt, dass $v_\alpha$ unabhängig von $\mu$ ist.

$$v(\alpha,\mu)_\alpha = \phi(\alpha) \overset{\int d\alpha}{\Longrightarrow} v(\alpha,\mu) = \Phi(\alpha) + \chi(\mu)$$

bzw.

$$u(x,t) = v(\alpha(x,t),\mu(x,t)) = \Phi(x+\frac{t}{4}) + \chi(x-t)$$

mit hinreichend glatten Funktionen $\Phi$ und $\chi$.

d) Aus den Anfangswerten ergeben sich die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \Phi(x) + \chi(x) \overset{!}{=} 0 \quad \text{sowie} \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{4}\Phi'(x) - \chi'(x) \overset{!}{=} 2xe^{-x^2}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\chi(x) = -\Phi(x)$$

und damit lautet die zweite Gleichung

$$\frac{1}{4}\Phi'(x) + \Phi'(x) \overset{!}{=} 2xe^{-x^2} \iff \Phi'(x) = \frac{4}{5}\left(2xe^{-x^2}\right).$$

Integration liefert

$$-\chi(x) = \Phi(x)) = -\frac{4}{5}e^{-x^2}.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher gegeben durch

$$u(x,t) = \Phi(x+\frac{t}{4}) + \chi(x-t) = -\frac{4}{5}e^{-(x+\frac{t}{4})^2} + \frac{4}{5}e^{-(x-t)^2}.$$

**Aufgabe 2:** Tipp: Vorlesung Seite 60 bzw. 65.

a) Sei $\alpha$ eine fest vorgegebene reelle Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen $u(x,y)$ in ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

i) $\tilde{u}(x,y) = \cos(\alpha x) \cdot g(y)$, ii) $u(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + g(x) \cdot y^2)$.

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\right\}$ und $u$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \Omega, \qquad u(x,y) = \frac{2y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von $u$ im Ursprung.

Hinweise:

- Verwenden Sie Polarkoordinaten und die Mittelwerteigenschaft (Seite 65 Vorlesung)
- Es gilt: $\sin^2(\varphi) = \dfrac{1-\cos(2\varphi)}{2}$.

**Lösung:**

a) i) $\Delta\tilde{u}(x,y) = -\alpha^2 \cos(\alpha x) g(y) + \cos(\alpha x) \cdot g''(y) \stackrel{!}{=} 0, \qquad \forall x,\, y \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow g''(y) - \alpha^2 g(y) \stackrel{!}{=} 0$.

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit dem charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha^2$.

Die allgemeine Lösung ist $g(y) = k_1 e^{-\alpha y} + k_2 e^{\alpha y}$.

$\tilde{u}$ ist genau dann harmonisch, wenn

$$g(y) = k_1 e^{-\alpha y} + k_2 e^{\alpha y} \qquad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) $\Delta u(x,y) = \Delta\left(\frac{1}{2} \cdot (x^3 + g(x) \cdot y^2)\right) \stackrel{!}{=} 0, \qquad \forall, x,\, y \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot (6x + g''(x) y^2 + 2g(x)) \stackrel{!}{=} 0, \qquad \forall, x,\, y \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow g''(x) = 0$ und $6x + 2g(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = -3x$.

$\tilde{u}$ ist genau dann harmonisch, wenn $g(x) = -3x$.

b) $K_4$ sei der Rand der Kreisscheibe mit Radius 4 um Null und

$c(t) = (4\cos(t),\, 4\sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$

eine Parametrisierung von $K_4$. Dann gilt wegen der Mittelwerteigenschaft

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi \cdot 4} \int_{K_4} \frac{2y^2}{x^2+y^2}\, d(x,y) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cdot 16 \sin^2(t)}{16\cos^2(t) + 16\sin^2(t)} \cdot \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) \cdot 4\, dt = 1.$$

**Aufgabe 3:** Tipp: Vorlesung Seite 61-64 und Seite 69.

a) Sei
$$\Omega_2 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x^2+y^2 < 4\}.$$
Bestimmen Sie eine Lösung von
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_2, \\ u(x,y) = 1 & \text{für} & x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$
Ist die Lösung eindeutig?

b) Sei
$$\Omega_3 = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$$
Bestimmen Sie eine Lösung von
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_3, \\ u(x,y,z) = 1 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 1, \\ u(x,y,z) = 3 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 4. \end{cases}$$
Ist die Lösung eindeutig?

**Lösung:**

Nach Vorlesung Seite 63/64 lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von
$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + c, \qquad a,\, c \in \mathbb{R}$$
darstellen.

a) Da $(0,0)^\top \notin \Omega_2$, gilt mit der Fundamentallösung
$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|_2)$$
die Form
$$u(x,y) = a\Phi(x,y) + c.$$
Die Randbedingungen verlangen
$$\begin{matrix} u(x,y) = 1 & \text{für} & x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & x^2+y^2 = 4. \end{matrix}$$
Aus der ersten Randbedingung erhalten wir
$-\frac{a}{2\pi}\ln(1) + c = c \overset{!}{=} 1$
und damit aus der zweiten Randbedingung

$-\frac{a}{2\pi}\ln(2) + 1 \overset{!}{=} 3 \;\Rightarrow\; a = -\frac{4\pi}{\ln(2)}$,
d.h.

$$u(x,y) = \frac{2}{\ln(2)} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 1.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maxiumprinzip (Seite 69 der Vorlesung).

b) Analog zu Teil a) liefert die Vorlesung

$$u(x,y,z) = a\Phi(x,y,z) + c, \qquad a, c \in \mathbb{R},$$

mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\|(x,y,z)\|_2^{-1}.$$

Die Randdaten liefern dann die Bedingungen

$$\frac{a}{4\pi} + c = 1, \qquad \frac{a}{8\pi} + c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a = -16\pi, \quad c = 5,$$

d.h.

$$u(x,y,z) = -\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 5.$$

Die Eindeutigkeit folgt wieder aus dem Maxiumsprinzip.