Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Tipp: Seite 52 Vorlesung.

Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u\,,$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)\,,$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0\,,$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x\,,$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0\,.$

Lösung :

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$

$$2 \cdot 8 - 4^2 = 0 \qquad \text{parabolisch}\,.$$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \text{hyperbolisch}\,.$$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$3 \cdot 1 - 1^2 = 2 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \ldots = \ldots$

$$1 \cdot e^x - 0^2 > 0 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x+y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$x^2 + y^2 - (x+y)^2 = -2xy \qquad \begin{cases} \text{parabolisch für} & xy = 0, \\ \text{hyperbolisch für} & xy > 0, \\ \text{elliptisch für} & xy < 0. \end{cases}$$

$$\text{parabolisch} \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} \text{ellipt.} & \text{hyp} \\ \hline \text{hyp} & \text{ellipt.} \end{array}\!\!\longrightarrow$$

$$\uparrow$$
$$\text{parabolisch}$$

Aufgabe 2: Tipp: Seiten 59-70 Vorlesung.

Bestimmen Sie den Wert der in $\Omega := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ harmonischen Funktion $u(x,y)$ im Punkt $\binom{0}{0}$ mit den Randdaten

a) $u(x,y) = \dfrac{x+y+1}{4} =: g(x,y)$ auf Rand Omega $= \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.

b) $u(x,y) = x^2y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

c) $u(x,y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.

d) $u(x,y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum- /Minimumprinzips.

Lösung:

a) $u(x,y) = \dfrac{x+y+1}{4} = g(x,y)$ auf Rand Omega $= \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.

K_2 sei der Kreis mit Radius $R = 2$ und $c(t) = (2\cos\phi,\, 2\sin\phi)$ eine Parametrisierung von K_2. Dann gilt nach der Poissonschen Integralformel für die Lösung

$$u(x,y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi R} \int_{\|z\|=R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$u(0,0) = \frac{4}{4\pi} \int_{\|z\|=2} \frac{z_1 + z_2 + 1}{16}\, d(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\phi + 2\sin\phi + 1}{4} \cdot 2\, dt = \frac{1}{4}.$$

b) $u(x,y) = x^2y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Seien K_2 und $c(t)$ wie in Teil a) definiert. Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} u(0,0) =& \frac{1}{2\pi \cdot 2} \int_{K_2} (x^2y + 2)\, d(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (4\cos^2(\phi) 2\sin(\phi) + 2) \cdot 2\, dt \\ =& \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{8\cos^3(\phi)}{3} + 2t \right]_0^{2\pi} = 2. \end{aligned}$$

c) $u(x,y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.

$u(x,y) = x^2 - y^2$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe, ist also die eindeutige Lösung. Damit folgt $u(0,0) = 0$

d) $u(x,y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum- /Minimumprinzips.

$u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω. Da Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ auf dem Rand angenommen werden, ist u in der ganzen Kreisscheibe konstant $= 4$.