Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben für $u(x,t)$:

a)
$$\begin{aligned} u_t + \tfrac{1}{2}u_x &= 0, && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 2\sin(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u_t + \tfrac{1}{2}u_x &= -4\,(u+1), && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 2\sin(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x(t) = \frac{t}{2} + \tilde{C} \Longrightarrow 2x - t = C.$

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u = D.$

Allgemeine Lösung:

$D = f(C) \Longrightarrow u = f(2x-t)\,.$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = f(2x-0) \overset{!}{=} 2\sin(x) \Longrightarrow f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\,.$

Die Lösung der AWA ist also:

$$u(x,t) = 2\sin\left(x - \frac{t}{2}\right).$$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x(t) = \frac{t}{2} + \tilde{C} \Longrightarrow 2x - t = C$

$\frac{du}{dt} = -4(u+1) \Longrightarrow \frac{du}{u+1} == -4\,dt \Longrightarrow \ln(|u+1|) = -4t + d$

$|u+1| = e^{-4t} \cdot \tilde{d}, \qquad \tilde{d} \in \mathbb{R}^+$

$\Longrightarrow u + 1 = \tilde{d}e^{-4t}$ oder $-u - 1 = \tilde{d}e^{-4t}$

$\Longrightarrow u = -1 \pm \tilde{d}e^{-4t}, \qquad \tilde{d} \in \mathbb{R}^+\,.$

Da $u = -1$ ebenfalls eine Lösung ist, erhalten wir

$u(x(t),t) \;=\; D\cdot e^{-4t} \;-\; 1, \qquad D\in\mathbb{R} \qquad \text{oder} \qquad D = e^{4t}(u+1)\,.$

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen liefert die allgemeine Lösung:

$D \;=\; f(C) \implies e^{4t}(u+1) = f(2x-t) \implies u(x,t) = e^{-4t}\cdot f(2x-t) \;-\; 1\,.$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = e^0\cdot f(2x-0) \;-\; 1 \stackrel{!}{=} 2\,\sin(x) \implies f(x) = 1 \;+\; 2\,\sin(\tfrac{x}{2})\;.$

$u(x,t) = e^{-4t}\,\left[2\sin\left(x-\tfrac{t}{2}\right) \;+\; 1\right] \;-\; 1\,.$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,y)$ der folgenden Differentialgleichung

$$xu_x + \frac{y}{2}u_y = u\,,$$

die die Bedingung $u(1,y) = 1 + y^2\,, \qquad y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung 2:

a) $xu_x + \frac{y}{2}u_y = u\,, \qquad u(1,y) = 1 + y^2$

Mit x als Parameter rechnet man für $x \neq 0$ für die DGL $u_x + \frac{y}{2x}u_y = \frac{u}{x}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} & \Longrightarrow & \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x} \\
\Longrightarrow 2\ln|y| = \ln|x| + c & \Longrightarrow & e^{2\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} \\
\Longrightarrow y^2 = c_1 \cdot x & \Longrightarrow & c_1 = \frac{y^2}{x} \\
\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} & \Longrightarrow & \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \\
\ln|u| = \ln|x| + d & \Longrightarrow & u = c_2 \cdot x \Longrightarrow c_2 = \frac{u}{x} \\
c_2 = f(c_1) & \Longrightarrow & \frac{u}{x} = f(\frac{y^2}{x}) \Longrightarrow u(x,y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x})
\end{array}$$

Das ist die allgemeine Lösung. Jetzt noch f mit Hilfe der Anfangsbedingung festlegen: $u(1,y) = 1 + y^2$ in die allgemeine Lösung einsetzen

$u(x,y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x})$

$u(1,y) = 1 \cdot f(\frac{y^2}{1}) = f(y^2) \overset{!}{=} 1 + y^2$

Also $f(\mu) = 1 + \mu$ und damit

$u(x,y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x}) = x \cdot (1 + \frac{y^2}{x}) = x + y^2$

Nachträglich kann man jetzt feststellen, dass die Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ die DGL + Anfangsbedingung erfüllt. Die Einschränkung $x \neq 0$ kann also weggelassen werden.

ALTERNATIV:

Hilfsproblem $\quad xU_x + \frac{y}{2}U_y + uU_u = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = x & \Longrightarrow \quad x = c_1 e^t \\ \dot{y} = \frac{y}{2} & \Longrightarrow \quad y = c_2 e^{\frac{t}{2}} \\ \dot{u} = u & \Longrightarrow \quad u = c_3 e^t \end{cases}$$

Es gilt (mit geeigneten Konstanten)

$$\begin{cases} x & = cy^2 \\ u & = dx \end{cases}$$

$$c = \frac{x}{y^2}\,, \qquad d = \frac{u}{x}\,, \qquad \phi\left(\frac{x}{y^2}, \frac{u}{x}\right) = 0$$

Auflösbarkeit vorausgesetzt, folgt

$$\frac{u}{x} = \psi\left(\frac{x}{y^2}\right) \qquad u = x \cdot \psi\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

zusätzlich muss gelten: $\qquad u(1,y) = \psi\left(\frac{1}{y^2}\right) = y^2 + 1$

$$\Longrightarrow \psi(\mu) = \frac{1}{\mu} + 1 \Longleftrightarrow \psi\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x} + 1 \Longrightarrow \boxed{u = y^2 + x}$$

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Rechner)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u_t + 3u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \forall x > 0 \end{cases}$$

a) Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem auf.

b) Sind die Charakteristiken Geraden?

c) Zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte
$(x_k, 0) := (k, 0)$ für $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Geben Sie an welche Werte die Lösung entlang dieser Charakteristiken annimmt.

d) Können Sie mit Hilfe der Teile a)- c) die Werte von $u(x,t)$ in den Punkten $(-1,2), (1,2)$ und $(3,2)$ angeben?

Lösung:

a) Erweitertes Problem $\quad U_t + (3u)U_x + 0 \cdot U_u \; = \; 0$ ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = 3u, \qquad \frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow$$
$$u = C, \qquad dx = 3C dt$$
$$\Longrightarrow x(t) = 3Ct + D = 3ut + D \Longrightarrow D = x - 3ut\,.$$

b) Die Charakteristiken sind Geraden, denn auf den Charakteristiken gilt

$\frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow u$ ist also entlang jeder Charakteristik konstant. Außerdem gilt

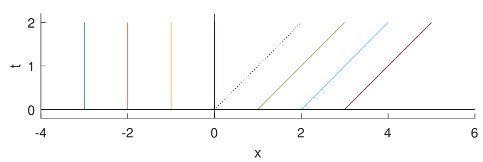
$\frac{dx}{dt} = 3u \qquad \Longrightarrow$ also ist $\frac{dx}{dt}$ konstant entlang der Charakteristik. D.h.

die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden.

c) Skizze:

Für $x(0) \leq 0$ gilt $\frac{dx}{dt} = 0$. Die Charakteristiken sind in der $(x,t)-$ Ebene senkrechte Geraden. Auf diesen Geraden gilt $u = 0$.

Für $x(0) > 0$ gilt $\frac{dx}{dt} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Die Charakteristiken sind in der $(x,t)-$ Ebene Geraden mit Steigung 1. Auf diesen Geraden gilt $u = \frac{1}{3}$.



d) Aus der Skizze entnimmt man $u(x,t) = 0, \forall x \leq 0$. Insbesondere also $u(-1,2) = 0$.
Weiter entnimmt man der Skizze $u(x,t) = \frac{1}{3}, \forall x > t$. Insbesondere also $u(3,2) = \frac{1}{3}$.
Die Charakteristiken helfen nicht bei der Bestimmung der Lösungswerte $u(x,t)$ für $0 < x < t$, also zum Beispiel $u(1,2)$.
Die Lösung dieses Problems wird auf dem nächsten Blatt behandelt!

Bearbeitung am 25.04.-29.04.2022