Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: [**5 Punkte**]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - \sin(t)\, u_x &= \cos(t)\,, && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) = e^{-x^2} && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) \Longrightarrow dx = -\sin(t)dt \Longrightarrow x = \cos(t) + C_1$ [**1 Punkt**]

$\frac{du}{dt} = \cos(t) \Longrightarrow du = \cos(t)dt \Longrightarrow u = \sin(t) + C_2\,.$ [**1 Punkt**]

Mit $C_1 = x - \cos(t)$ und $C_2 = u - \sin(t)$ machen wir den Ansatz

$C_2 = f(C_1)$

und erhalten

$u - \sin(t) = f(x - \cos(t))$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sin(t) + f(x - \cos(t))\,.$ [**1 Punkt**]

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = \sin(0) + f(x - \cos(0)) = f(x-1) \overset{!}{=} e^{-x^2}\,.$

Also $f(\mu) = e^{-(\mu+1)^2}$ [**1 Punkt**]

$u(x,t) = \sin(t) + e^{-(x-\cos(t)+1)^2}\,.$ [**1 Punkt**]

Aufgabe 2: [6= 2+1+2+1 Punkte]

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 20\, u_x = 21u$.

B) $u_t + 20u\, u_x = 21$.

C) $u_t - 5u^2\, u_x = 0$.

D) $u_t + 5(x+1)\, u_x = 0$.

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$,

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
ii) Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Lösung zu 2:

Für A) gilt

$\frac{du}{dt} = 21u \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 20$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für B) gilt

$\frac{du}{dt} = 21 \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 20u$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also nicht konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Für C) gilt

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = -5u^2$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für D) gilt $\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Die Charakteristiken haben die Steigung $\frac{dx}{dt} = 5(x+1)$.

Die Steigung der Charakteristiken ist nicht konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine stetige „Lösung“ $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, & x,t &> 0 \\ u(x,0) &= x & (x &\geq 0) \\ u(0,t) &= t & (t &\geq 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0)=x$ bzw. zur Randbedingung $u(0,t)=t$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene „Lösung“ für alle $x,t \geq 0$ partiell differenzierbar?

Lösung 3:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Longrightarrow x(t) = t + C_1 \Longrightarrow C_1 = x - t$$
$$\frac{du}{dt} = x = C_1 + t \Longrightarrow u = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \Longrightarrow C_2 = u - \frac{t^2}{2} - (x-t)t$$

Im Falle der Auflösbarkeit:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \Longrightarrow u + \frac{t^2}{2} - xt = f(x-t).$$

Für die vorgegebenen Anfangswerte erhalten wir also die Lösung u_A:

$$u_A(x,0) = u(x,0) = f(x) = x \Longrightarrow u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2}$$

u_A erfüllt die Dgl und die Anfangswerte. Es gilt allerdings $u(0,t) = -t - \frac{t^2}{2}$. Die Randbedingung ist also nur für $t=0$ erfüllt. Wir gehen wieder von der allgemeinen Lösung

$$u = f(x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

aus und passen an die Randdaten $u(0,t) = t$ an.

$$t = f(-t) - \frac{t^2}{2} \Longrightarrow f(t) = \frac{t^2}{2} - t \Longrightarrow u_R(x,t) = \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

Wenn wir die Lösungen stetig zusammensetzen wollen, müssen wir eine Kurve finden längs der $u_A = u_R$ gilt:

$$u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} \stackrel{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt = u_R(x,t)$$
$$\Longleftrightarrow (x-t) \stackrel{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) \Longleftrightarrow (x-t)\left(2 - \frac{(x-t)}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt wenn $x = t$ oder $x = t+4$ gilt. Wegen der Anfangs-/Randwerte setzen wir entlang der Geraden $x=t$ zusammen.

$$u(x,t) := \begin{cases} (x-t) + xt - \dfrac{t^2}{2} & x > t \\ \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} & x \leq t\,. \end{cases}$$

Wie man leicht nachrechnet, machen die partiellen Ableitungen hier Sprünge.Zum Beispiel gilt:

$$u_t(x,t) := \begin{cases} -1 + x - t \xrightarrow{x \to t} -1 & x > t \\ -x + t + 1 + x - t \xrightarrow{x \to t} +1 & x < t\,. \end{cases}$$

Die zusammengesetzte Funktion ist also nicht partiell differenzierbar.

Abgabe bis: 09.05.2025