**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 1, Präsenzaufgaben

Zu lösen sei die Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension:

$$u_t - cu_{xx} \,=\, 0$$

mit einem festen Parameter $c \in \mathbb{R}^+$ (Wärmeleitfähigkeits- / Diffusionskoeffizient).

Zeigen Sie, dass für jede beliebige Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ und für jedes beliebige $k \in \mathbb{Z}$ durch die Funktion

$$u_k(x,t) = \sin\left(\, k\omega x \,\right) \cdot e^{-ck^2\omega^2 t}$$

eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist.

Hier führt also ein sogenannter Produktansatz: $u(x,t) \,=\, q(t)\cdot p(x)$ zu Lösungen.

**Lösung zur Aufgabe 1:**

Ableiten ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t) = -ck^2\omega^2 \sin\left(\, k\omega x \,\right) \cdot e^{-ck^2\omega^2 t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_k(x,t) = k\omega \cos\left(\, k\omega x \,\right) \cdot e^{-ck^2\omega^2 t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_k(x,t) = -k^2\omega^2 \sin\left(\, k\omega x \,\right) \cdot e^{-ck^2\omega^2 t}.$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t) - c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_k(x,t) = \, 0\,.$$

**Bemerkungen:**

- Nach Hausaufgabe 1) ist auch jede endliche Linearkombinationen $\sum_{k=m}^{n} a_k u_k(x,t)$ dieser Funktionen wieder eine Lösung der Differentialgleichung .

- Ein sogenannter Produktansatz: $u(x,t) \,=\, q(t)\cdot p(x)$ liefert hier

$$p(x)\dot{q}(t) - cp''(x)q(t) = \, 0.$$

Umsortierung liefert

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} \stackrel{!}{=} c\frac{p''(x)}{p(x)}$$

Da die rechte Seite nur von $x$ abhängt und die linke Seite nur von $t$, müssen beide Seiten konstant sein. Also zum Beispiel mit einer festen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} \stackrel{!}{=} c\frac{p''(x)}{p(x)} =: -\lambda.$$

Wir erhalten also ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die über den Parameter $\lambda$ gekoppelt sind. Später im Semester werden wir uns ausführlich mit der Lösung dieses Systems befassen.

**Aufgabe 2:**

Wir betrachten nun die sogenannte Telegraphengleichung.

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) \;=\; U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält $U$ als Lösung der Differentialgleichung

$$U_{tt} \;-\; c^2 U_{xx} \;+\; (\alpha+\beta)U_t \;+\; \alpha\beta U \;=\; 0\,.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, c$ konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass hier ein Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung (Faktor $e^{-kx}$) mit einem zeitlich periodischen Verlauf (also Cosinus/Sinus in $t$) verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt, zum Erfolg führt. Zum Beispiel also:

$$U(x,t) := \; e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(\mu t - \gamma x) \;+\; \tilde{\delta} \sin(\tilde{\mu} t - \tilde{\gamma} x)\Big)$$

Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

**Tipp:** $a^2 b^2 + a^2 - b^2 - 1 = \; (a^2-1)(b^2+1)$.

b) **(Nur für die ganz schnellen Studierenden)**

Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt.

Wählen Sie wieder exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

**Lösung der Aufgabe 2:**

a) Für den Ansatz: $U(x,t) := \; e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(\mu t - \gamma x) \;+\; \tilde{\delta} \sin(\tilde{\mu} t - \tilde{\gamma} x)\Big)$
verlangt die Randbedingung

$$U(0,t) = \delta \cos(\mu t) \;+\; \tilde{\delta} \sin(\tilde{\mu} t) \stackrel{!}{=} \; U_0 \cos(\omega t)\,.$$

Wir wählen daher $\delta = U_0,\ \mu = \omega,\ \tilde{\delta} = 0$.

Also

$$U(x,t) = \; U_0 e^{-kx} \; \cos(\omega t - \gamma x)$$

und

$$U_x(x,t) = \; U_0 e^{-kx} \; [\gamma \sin(\omega t - \gamma x) - k \cos(\omega t - \gamma x)\,]\,,$$

$$U_t(x,t) = \; -\omega U_0 e^{-kx} \; \sin(\omega t - \gamma x)$$

$$U_{xx}(x,t) = \; U_0 e^{-kx} \; \Big[-2k\gamma \sin(\omega t - \gamma x) + (k^2 - \gamma^2) \cos(\omega t - \gamma x)\Big]\,,$$

$$U_{tt}(x,t) = \; -\omega^2 U_0 e^{-kx} \; \cos(\omega t - \gamma x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung mit $\alpha = \beta = c = 1$ ergibt

$$U_0 e^{-kx} \left\{ \cos(\omega t - \gamma x) \left[ -\omega^2 - (k^2 - \gamma^2) + 1 \right] + \sin(\omega t - \gamma x) \left[ 2k\gamma - 2\omega \right] \right\} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \forall x, t > 0$$

Dies kann $\forall x, t > 0$ nur gelten, wenn

$k\gamma = \omega$ und $-\omega^2 - k^2 + \gamma^2 + 1 = 0$.

Einsetzen von $\omega = k\gamma$ in die zweite Gleichung ergibt

$k^2\gamma^2 + k^2 - \gamma^2 - 1 = (k^2 - 1)(\gamma^2 + 1) \stackrel{!}{=} 0$ wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ ist

$\Longrightarrow k^2 = 1,$ wobei $k \in \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt wurde, also ist $k = 1$.

Damit folgt $\gamma = \omega$ und

$$U(x, t) = U_0 e^{-x} \cos(\omega(t - x)) .$$

b) Einsetzen des einfachen Produktansatzes $U(x, t) = w(x) \cdot v(t)$ in die Differentialgleichung liefert

$$w(x)\ddot{v}(t) - c^2 w''(x) v(t) + (\alpha + \beta) w(x) \dot{v}(t) + \alpha\beta w(x) v(t) = 0.$$

Umsortierung liefert

$$\frac{\ddot{v}(t) + (\alpha + \beta)\dot{v}(t) + \alpha\beta v(t)}{v(t)} \stackrel{!}{=} c^2 \frac{w''(x)}{w(x)}$$

Da die rechte Seite nur von $x$ abhängt und die linke Seite nur von $t$, müssen beide Seiten konstant sein. Also zum Beispiel mit einer festen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\ddot{v}(t) + (\alpha + \beta)\dot{v}(t) + \alpha\beta v(t)}{v(t)} = c^2 \frac{w''(x)}{w(x)} =: -\lambda.$$

Wir erhalten also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung für $v$ lautet

$$\ddot{v}(t) + (\alpha + \beta)\dot{v}(t) + \alpha\beta v(t) = -\lambda v(t) \iff \ddot{v} + (\alpha + \beta)\dot{v} + (\alpha\beta + \lambda) v = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir berechnen also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\mu) := \mu^2 + (\alpha + \beta)\mu + (\alpha\beta + \lambda) = 0 \iff \mu_{1,2} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - (\alpha\beta + \lambda)}$$

Die allgemeine Lösung ist $v(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}$ oder $v(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 t e^{\mu_1 t}$. Diese ist nur dann periodisch, wenn $\mu_1$, $\mu_2$ rein imaginär sind. Letzteres ist nur möglich wenn $\alpha + \beta = 0$ gilt. $\alpha$ und $\beta$ sind nach Aufgabenstellung aber positive Konstanten. Unser Produktansatz führt also nicht zum Ziel.

**Bearbeitung**: 05.05.-08.05.2025