Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Differentialgleichungen für $u : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$u_t(x,t) - \epsilon u_{xx}(x,t) = 0, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

$$u_t(x,t) + \left(\frac{(u(x,t))^2}{2}\right)_x = 0, \tag{2}$$

$$u_t(x,t) + \left(\frac{(u(x,t))^2}{2}\right)_x - \epsilon u_{xx}(x,t) = 0, \tag{3}$$

$$(u_x(x,y))^2 - (u_y(x,y))^2 - u(x,y) = 0 \tag{4}$$

a) Geben Sie für jede der Differentialgleichungen die Ordnung an und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine lineare, eine semilineare, eine quasilineare oder eine (voll-) nichtlineare Differentialgleichung handelt.

b) Es seien $u^{[1]}$ und $u^{[2]}$ jeweils zwei verschiedene, nicht konstante Lösungen der obigen Differentialgleichungen.

Prüfen Sie für die Differentialgleichungen (1) bis (4), ob dann $\tilde{u} := k \cdot u^{[1]}$ für beliebige $k \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) ebenfalls eine Lösung ist. Wenn ja, prüfen Sie, ob auch $\hat{u} := u^{[1]} + u^{[2]}$ die Differentialgleichung löst.

Machen Sie sich klar, dass in dem Fall jede Linearkombination beliebig vieler Lösungen der Differentialgleichung wieder eine Lösung ist (vollständige Induktion).

Lösung zu 1:

a) Die Differentialgleichung (1) hat die Ordnung 2 und ist linear.

Die Differentialgleichung (2) hat die Ordnung 1 und ist quasilinear: Der Koeffizient vor u_x hängt von u ab:

$$u_t(x,t) + \left(\frac{(u(x,t))^2}{2}\right)_x = u_t(x,t) + u(x,t) \cdot u_x(x,t) = 0.$$

Die Differentialgleichung (3) hat die Ordnung 2 und ist semilinear: Der Koeffizient vor u_{xx} hängt nicht von u oder dessen Ableitungen ab.

Die Differentialgleichung (4) hat die Ordnung 1 und ist (voll-) nichtlinear.

b) Für die Differentialgleichung (1) rechnen wir

$$u_t^{[1]} - \epsilon u_{xx}^{[1]} = 0 \Longrightarrow (k \cdot u^{[1]})_t - \epsilon (k u^{[1]})_{xx} = k[(u^{[1]})_t - \epsilon u_{xx}^{[1]}] = 0$$

Ist u eine Lösung, so ist auch jedes Vielfache von u eine Lösung.

Es seien $u^{[1]}$ und $u^{[2]}$ zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (1). Dann gilt

$u_t^{[1]} - \epsilon u_{xx}^{[1]} = 0$ und $u_t^{[2]} - \epsilon u_{xx}^{[2]} = 0$ und damit

$$\begin{aligned}\left(u^{[1]} + u^{[2]}\right)_t - \epsilon \left(u^{[1]} + u^{[2]}\right)_{xx} &= u_t^{[1]} + u_t^{[2]} - \epsilon \left(u_{xx}^{[1]} + u_{xx}^{[2]}\right) \\ &= \left(u_t^{[1]} - \epsilon u_{xx}^{[1]}\right) + \left(u_t^{[2]} - \epsilon u_{xx}^{[2]}\right) = 0.\end{aligned}$$

Summen von Lösungen der Differentialgleichung (1) lösen ebenfalls die Differentialgleichung (1).

Für die Differentialgleichung (2) rechnen wir mit einer Lösung $u^{[1]}$ und somit $u_t^{[1]} = -\left(\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x$ für $\tilde{u} := k \cdot u^{[1]}$ und einem beliebigen $0 \neq k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t + \left(\frac{(\tilde{u})^2}{2}\right)_x &= \left(k \cdot u^{[1]}\right)_t + \left(\frac{(k u^{[1]})^2}{2}\right)_x = k \cdot u_t^{[1]} + \left(\frac{k^2 \left(u^{[1]}\right)^2}{2}\right)_x \\ &= k\left(-\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x + k^2 \left(\frac{\left(u^{[1]}\right)^2}{2}\right)_x = (k^2 - k)\left(\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x\end{aligned}$$

Da $u^{[1]}$ nicht konstant sein soll, gilt die Differentialgleichung nur für $k = 1$, also für $\tilde{u} = u^{[1]}$.

Für die Differentialgleichung (3) rechnen wir mit einer Lösung $u^{[1]}$ für $\tilde{u} := k \cdot u^{[1]}$ und einem beliebigen $0 \neq k \in \mathbb{C}$ völlig analog, nur gilt hier $u_t^{[1]} = -\left(\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x + \epsilon u_{xx}^{[1]}$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t + \left(\frac{(\tilde{u})^2}{2}\right)_x - \epsilon \tilde{u}_{xx} &= \left(k \cdot u^{[1]}\right)_t + \left(\frac{(k u^{[1]})^2}{2}\right)_x - \epsilon k u_{xx}^{[1]} \\ &= -k\left(\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x + k\,\epsilon u_{xx}^{[1]} + k^2 \left(\frac{\left(u^{[1]}\right)^2}{2}\right)_x - \epsilon k u_{xx}^{[1]} \\ &= (k^2 - k)\left(\frac{(u^{[1]})^2}{2}\right)_x\end{aligned}$$

Da $u^{[1]}$ nicht konstant sein soll, gilt die Differentialgleichung nur für $k = 1$, also für $\tilde{u} = u^{[1]}$.

Für die Differentialgleichung (4) rechnen wir mit einer Lösung $u^{[1]}$ und somit

$\left(u_x^{[1]}(x,y)\right)^2 - \left(u_y^{[1]}(x,y)\right)^2 = u^{[1]}(x,y)$

für $\tilde{u} := k \cdot u^{[1]}$ und einem beliebigen $0 \neq k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\left(ku_x^{[1]}(x,y)\right)^2 - \left(ku_y^{[1]}(x,y)\right)^2 - ku^{[1]}(x,y)\\ = k^2\left(u_x^{[1]}(x,y)\right)^2 - k^2\left(u_y^{[1]}(x,y)\right)^2 - ku^{[1]}(x,y) = (k^2-k)u^{[1]}(x,y)\end{aligned}$$

Da $u^{[1]}$ nicht konstant sein soll, insbesondere also auch nicht identisch verschwinden soll, gilt die Gleichung nur für $k = 1$, also für $\tilde{u} = u^{[1]}$.

Aufgabe 2:
Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluss von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. In einem sogenannten makroskopischen Modell betrachtet man nicht einzelne Fahrzeuge, sondern den Gesamtfluss der Fahrzeuge. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \text{(Längen-)Dichte der Fahrzeuge im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t \\ &= \text{Fahrzeuge/Längeneinheit im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t \\ v(x,t) &= \text{ Geschwindigkeit im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t, \\ q(x,t) &= u(x,t)\cdot v(x,t) = \text{ Fluss} \\ &= \text{ Anzahl Fahrzeuge, die } x \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ pro Zeiteinheit passieren.} \end{aligned}$$

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und dass keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Sei $N(t,a,\Delta a) :=$ Anzahl Fahrzeuge auf einem Ortsintervall $[a, a+\Delta a]$ zum Zeitpunkt t. Machen Sie sich klar, dass dann einerseits

$$N(t,a,\Delta a) \;=\; \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx$$

gilt und andererseits

$$N(t,a,\Delta a) - N(t_0,a,\Delta a) \;=\; \int_{t_0}^{t} \left(q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau)\right) d\tau\,.$$

Leiten Sie hieraus die Kontinuitätsgleichung, d.h. hier die Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge),

$$u_t + q_x = 0$$

her.

Tipps zum Vorgehen:

- Leiten Sie beide Formeln für N nach t ab. Beachten Sie dabei, dass für die Ableitung parameterabhängiger Integrale bei hinreichender Glattheit von f die folgende **Leibniz–Regel** gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt \;=\; \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt \;+\; b'(x)\,f(x,b(x)) \;-\; a'(x)\,f(x,a(x))}$$

- Teilen Sie durch Δa.
- Betrachten Sie den Grenzfall $\Delta a \to 0$.

b) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte fällt und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) \;=\; c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

Lösung:

a) Es gilt einerseits: $N(t) = \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx$

und andererseits: $N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^{t} q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau) d\tau$

Ableiten nach t ergibt: $\dfrac{\partial}{\partial t} N(t) = \dfrac{\partial}{\partial t} \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx = q(a,t) - q(a+\Delta a,t)$

Lässt man nun Δa gegen Null gehen, so folgt bei hinreichender Glattheit der beteiligten Funktionen

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\,dx = \lim_{\Delta a \to 0} -\frac{q(a+\Delta a,t) - q(a,t)}{\Delta a}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(a,t) = -\frac{\partial}{\partial a} q(a,t)$$

Da diese Überlegungen in jedem Punkt gelten, folgt die Kontinuitätsgleich. $u_t + q_x = 0$.

b)

$$v(x,t) = c + \frac{k}{u(x,t)} \qquad q(x,t) = c \cdot u(x,t) + k.$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Man erhält also die lineare Transportgleichung.

Bemerkung : Dies ist ein sehr einfaches, linearisiertes Modell. Es lässt z.B. beliebig hohe Dichte und beliebig hohe Geschwindigkeit zu. Bei einem etwas realistischerem Problem würden sich hier schon Stoßwellen und Verdünnungswellen ergeben (siehe spätere Übungen).

Abgabe bis: 25.04.25