Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel von d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\alpha)\,d\alpha$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung

$$\hat{u}_{tt} - c^2\hat{u}_{xx} = 0,\ \hat{u}(x,0) = g(x),\ \hat{u}_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R},\, c > 0.$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} f(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

löst die folgende Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} \,-\, c^2\tilde{u}_{xx} \;=\; f(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) \;=\; \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

(Beweis: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} \,-\, 4u_{xx} \;=\; 6x\sin t, \qquad x\in\mathbb{R},\, t>0\\ &u(x,0) \;=\; x,\, x\in\mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) \;=\; \sin(x),\, x\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

a) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\hat{u}_{tt} \,-\, 4\hat{u}_{xx} \;=\; 0, && x\in\mathbb{R},\, t>0\\ &\hat{u}(x,0) \;=\; x,\, x\in\mathbb{R}, && \hat{u}_t(x,0) \;=\; \sin(x),\, x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{tt} \,-\, 4\tilde{u}_{xx} \;=\; 6x\sin t, && x\in\mathbb{R},\, t>0\\ &\tilde{u}(x,0) \;=\; 0,\, x\in\mathbb{R}, && \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0,\, x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (3) löst.

Aufgabe 2: (Anschlagen einer Saite)

Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) \ = \ 0 && \text{für} \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tipp: Vorlesung Seite 150.

Als Lösung erhalten Sie eine Reihe. Plotten Sie die Partialsumme der ersten 20 nicht verschwindenden Summanden dieser Reihe für $c = 2$, $x \in [0,1]$ und $t \in [0, 0.4]$ bzw. $t \in [0,2]$.

Bearbeitung: 07.07.-.10.2025