Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, && \text{auf } \mathbb{R}^2\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(4\pi x) && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösung, die man mit der Formel von d'Alembert erhält für $t = 0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\,.$

Aufgabe 2:

Gesucht ist eine Näherung für die Lösung des folgenden Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && x \in (0, 2\pi),\ t > 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0, 2\pi) \\ u(0,t) &= u(2\pi, t) = 0 && t > 0 \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die 2π periodische Fortsetzung der Anfangsdaten für $x \in [-2\pi, 4\pi]\,.$

Bestimmen Sie eine Näherung $\tilde{u}$ für die Lösung u der Aufgabe indem Sie die auftretenden Fourier-Reihen nach dem dritten Term abbrechen. Prüfen Sie nach, welche Rand– bzw. Anfangsbedingungen bereits durch diese Näherungslösung erfüllt wird.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\ t > 0,\\
&u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3),\\
&u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0,\\
&u(3,t) = 1 && t \geq 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Überführen Sie die Aufgabe durch die Einführung einer geeigneten Funktion v in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen für v.

Geben Sie die Differentialgleichung für v und die Anfangsbedingungen für v an.

Abgabe bis: 11.07.2025