Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe: (Vgl. Vorlesung Seite 85-90)

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = e^{-t}\sin(2x) + 1 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+,\\
&u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\ ,\\
&u(0,t) = f(t) = t && t \in \mathbb{R}^+\\
&u(\pi,t) = g(t) = t && t \in \mathbb{R}^+\ .
\end{aligned}$$

a) Homogenisieren Sie zunächst die Randbedingungen, indem Sie die Funktion

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)\right]$$

mit $L = \pi$ einführen und in der Aufgabenstellung die u–Ausdrücke durch geeignete v–Ausdrücke ersetzen.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung

$$\begin{aligned}
&v_t^* - v_{xx}^* = 0 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+,\\
&v^*(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\ ,\\
&v^*(0,t) = v^*(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\ .
\end{aligned}$$

c) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
&v_t^{**} - v_{xx}^{**} = e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+,\\
&v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,\pi)\ ,\\
&v^{**}(0,t) = v^{**}(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\ .
\end{aligned}$$

mit Hilfe des Ansatzes

$$v^{**}(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\sin(kx)\,, \qquad a_k(0) = 0$$

d) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für u an.

Bearbeitung: 23-26.06.2025