

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Lösen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die folgende Dirichlet Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 & 0 \leq r < 3 \\ u(3, \varphi) &= \cos^2(\varphi) & \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipps:

- Vgl. Vorlesung Seite 85-88.
- Verwenden Sie für die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung $r^2 \cdot w''(r) + ar \cdot w'(r) + b \cdot w(r) = 0$ den Ansatz $w(r) = r^k$.
- Es gilt: $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\varphi))$.

Aufgabe 2:

- a) Leiten Sie mit Hilfe eines Produktansatzes eine Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

- b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $h(x) = 3 + 4 \cos(2\pi x)$.

Abgabe bis 27.06.2025