Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Tipp: Vorlesung Seite 47-53

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 2xe^{-x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in Matrixschreibweise.

b) Führen Sie die Substitution $\alpha = x + \frac{t}{4}$, $\mu = x - t$ durch und geben Sie die Differentialgleichung in Matrixschreibweise für $v(\alpha\,, \mu) := u(x,t)$ an.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung. Bestimmen Sie dazu $\boldsymbol{v}$ und führen Sie die Rücksubstitution durch.

d) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 2: Tipp: Vorlesung Seite 60 bzw. 65.

a) Sei α eine fest vorgegebene reelle Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen $u(x,y)$ in ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

   i) $\tilde{u}(x,y) = \cos(\alpha x) \cdot g(y)\,,$ ii) $u(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + g(x) \cdot y^2)\,.$

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\right\}$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x,y) = \frac{2y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

Hinweise:

- Verwenden Sie Polarkoordinaten und die Mittelwerteigenschaft (Seite 65 Vorlesung)
- Es gilt: $\sin^2(\varphi) = \dfrac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,.$

Aufgabe 3: Tipp: Vorlesung Seite 61-64 und Seite 69.

a) Sei
$$\Omega_2 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$
Bestimmen Sie eine Lösung von
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_2, \\ u(x,y) = 1 & \text{für} & x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$
Ist die Lösung eindeutig?

b) Sei
$$\Omega_3 = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$
Bestimmen Sie eine Lösung von
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_3, \\ u(x,y,z) = 1 & \text{für} & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ u(x,y,z) = 3 & \text{für} & x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$
Ist die Lösung eindeutig?

Besprechung: 09.06-13.06.2025