Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Tipp: Seite 52 Vorlesung.

Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

- a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$,
- b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$,
- c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$,
- d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x$,
- e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Aufgabe 2: Tipp: Seiten 59-70 Vorlesung.

Bestimmen Sie den Wert der in $\Omega := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \right\}$ harmonischen Funktion $u(x, y)$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Randdaten

- a) $u(x, y) = \frac{x + y + 1}{4} =: g(x, y)$ auf Rand $\Omega = \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.
- b) $u(x, y) = x^2 y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.
- c) $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.
- d) $u(x, y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum- /Minimumprinzips.

Abgabe bis 13.06.2025