

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie die Entropielösung $u(x, t)$ der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zu den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

- b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ -2 & 1 < x. \end{cases}$$

- (i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}]$ mit einem hinreichend kleinem \tilde{t} .
(ii) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus i) maximal fortgesetzt werden?
(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ und den Anfangsbedingungen

$$\text{a) } u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Studierenden)

Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Zeichnen Sie die Charakteristiken für die beiden Anfangswertaufgaben für die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beiden Anfangswertaufgaben die Lösung $u(x, 1)$ zum Zeitpunkt $t = 1$.

Was schließen Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burger's Gleichung?

Bearbeitung: 19.05.-22.05.2025