

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}u_t + u \cdot u_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dabei sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion mit zwei Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen).

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- (i) Es gibt eine eindeutige schwache Lösung.
- (ii) Zum Erhalt der Entropielösung muss man zwei Stoßwellen einführen.
- (iii) Die Entropielösung gilt für alle Zeiten, also für beliebige $t \in \mathbb{R}^+$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

- b) Wie lautet die Sprungbedingung für die schwache Lösung von

$$\begin{aligned}u_t + (u^3)_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\u(x, 0) &= \begin{cases} 4 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 & \text{für } x > 0? \end{cases}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Kür: Bestimmen Sie die Lösung für $t > 2$.

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x, t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$v(x, t)$ = Geschwindigkeit (Längeneinheit/Zeiteinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$q(x, t) = u(x, t) \cdot v(x, t)$ = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 2, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

eingeführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(x, t) := v(u(x, t)) := v_{max} \left(1 - \frac{u(x, t)}{u_{max}} \right)$$

- Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.
- Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.
- Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad (\text{Hier ist geeignet skaliert worden!})$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{rote Ampel/ Stau etc.})$$

- Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

Abgabe bis 23.05.2025