Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Zu lösen sei die Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension:

$$u_t - cu_{xx} = 0$$

mit einem festen Parameter $c \in \mathbb{R}^+$ (Wärmeleitfähigkeits- / Diffusionskoeffizient).

Zeigen Sie, dass für jede beliebige Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ und für jedes beliebige $k \in \mathbb{Z}$ durch die Funktion

$$u_k(x,t) = \sin(\, k\omega x\,) \cdot e^{-ck^2\omega^2 t}$$

eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist.

Hier führt also ein sogenannter Produktansatz: $u(x,t) = q(t) \cdot p(x)$ zu Lösungen.

Aufgabe 2:

Wir betrachten nun die sogenannte Telegraphengleichung.

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) = U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält U als Lösung der Differentialgleichung

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + (\alpha + \beta) U_t + \alpha\beta U = 0\,.$$

Dabei sind α, β, c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass hier ein Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung (Faktor e^{-kx}) mit einem zeitlich periodischen Verlauf (also Cosinus/Sinus in t) verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt, zum Erfolg führt. Zum Beispiel also:

$$U(x,t) := e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(\mu t - \gamma x) + \tilde{\delta} \sin(\tilde{\mu} t - \tilde{\gamma} x)\Big)$$

Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Tipp: $a^2b^2 + a^2 - b^2 - 1 = (a^2 - 1)(b^2 + 1)$.

b) **(Nur für die ganz schnellen Studierenden)**

Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt. Wählen Sie wieder exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Bearbeitung: 05.05.-08.05.2025