Hörsaalübung zu Blatt 6 Differentialgleichungen II
Wellengleichung

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Wellengleichung

Homogene Anfangwertaufgabe (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) = g(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Formel von d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\psi)\, d\psi\,.}$$

Herleitungsmethode: Mit der Substitution (vergleiche Präsenzaufgabe 1, Blatt 4)

$$\alpha = x + ct, \; \mu = x - ct,$$

$u_{tt} + (a+b)u_{tx} + ab\,u_{xx} = \dots$

mit $a = c \quad b = -c$

und

$$w(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = u(x,t)$$

liefert die Kettenregel $u_{tt} - c^2 u_{xx} \iff w_{\alpha\mu} = 0$ (Integrable Form)

Genauer: $\left(w_\alpha(\alpha,\mu)\right)_\mu = 0.$

$$\underline{w_\alpha(\alpha,\mu) = \phi(\alpha)} \overset{\int}{\Longrightarrow} \underline{w(\alpha,\mu) = \Phi(\alpha) + \Psi(\mu)}$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) \overset{!}{=} g(x), \qquad u_t(x,0) = \underline{c\Phi'(x) - c\Psi'(x)} \overset{!}{=} h(x)$$

Ableiten der ersten Gleichung liefert

$$c\Phi'(x) + c\Psi'(x) = cg'(x), \qquad u_t(x,0) = c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = h(x)$$

Dies sind 2 Gleichungen für Φ' und Ψ'. Auflösen ergibt die Formel von d'Alembert.

Nachweis zum Selbststudium:
Addieren der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$2c\Phi'(x) = \; cg'(x) + \; h(x) \implies \Phi'(x) = \frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2c}h(x)$$

$$\implies \Phi(x) = \frac{1}{2}g(x) + B + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} h(\sigma)d\sigma\,,$$

$$\Psi(x) = \; g(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2}g(x) - B - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} h(\sigma)d\sigma$$

$$\Phi(x+ct) = \tfrac{1}{2}g(x+ct) + B + \tfrac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} h(\sigma)d\sigma$$

$$\Psi(x-ct) = \tfrac{1}{2}g(x-ct) - B - \tfrac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} h(\sigma)d\sigma$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct) \\
&= \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} h(\sigma)d\sigma \; + \frac{1}{2}g(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} h(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\Big(\int_{x_0}^{x+ct} h(\sigma)d\sigma + \int_{x-ct}^{x_0} h(\sigma)d\sigma\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\sigma)d\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Inhomogene Wellengleichung (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} &= h(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

Beweis zum Selbststudium: Mit Der Leibniz Formel für Parameter-abhängige Integrale

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(y,z)dz = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d}{dy} f(y,z)dz + b'(y)f(y,b(y)) - a'(y)f(y,a(y))}$$

rechnet man

$$\tilde{u}_x(x,t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\right) d\omega\, d\tau$$

Nur Integrand hängt von x ab, nicht die Grenzen 0 und t

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\, d\omega\right)} d\tau$$

Grenzen hängen von x ab nicht der Integrand

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h(x-c(\tau-t)),\tau) - h(x+c(\tau-t)),\tau\right] d\tau$$

Nur Integrand hängt von x ab

$$\tilde{u}_{xx}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h_\omega(x-c(\tau-t)),\tau) - h_\omega(x+c(\tau-t)),\tau\right] d\tau$$

$$\tilde{u}_t(x,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\, d\omega\, d\tau\right)$$

Integrand hängt von t ab

Obergrenze hängt von t ab

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\, d\omega\right) d\tau$$

Nur Grenzen hängen von t ab

$$+ \frac{1}{2c}(\dot{t}) \underbrace{\int_{x+c(t-t)}^{x-c(t-t)} h(\omega,t)\, d\omega}_{\int_x^x \cdots = 0}$$

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h(\underbrace{x-c(\tau-t)}_{\text{Obergrenze für } \omega \text{ eingesetzt}},\tau)\cdot c - h(\underbrace{x+c(\tau-t)}_{\text{Untergrenze für } \omega \text{ eingesetzt}},\tau)\cdot(-c)\right] d\tau$$

$\frac{d}{dt}(x-c(\tau-t))$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t \left[h(x-c(\tau-t),\tau) + h(x+c(\tau-t),\tau)\right] d\tau}_{\text{Integrand und Obergrenze hängen von } t \text{ ab}}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt}(x,t) \; &= \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\frac{d}{dt}\,[h(x-c(\tau-t),\tau)}\, + h(x+c(\tau-t),\tau)]\,d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2c}(\dot{t})\;\underbrace{[h(x-c(t-t),t) + h(x+c(t-t),t)]}_{\text{obere Grenze } t \text{ eingesetzt für } \tau} \\
&= \frac{1}{2}\;\{h\underbrace{(x,t) + h(x,t}) \\
&\quad + \int_0^t \;[h_\omega\underbrace{(x-c(\tau-t),\tau)\cdot c}_{\text{Kettenregel}} + h_\omega(x+c(\tau-t),\tau)(-c)]\;d\tau\} \\
&= h(x,t)\; + \;\frac{c}{2}\int_0^t \;[h_\omega(x-c(\tau-t),\tau) - h_\omega(x+c(\tau-t),\tau)]\;d\tau
\end{aligned}
$$

Offensichtlich gilt $\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t)$. *Für die Anfangswerte erhält man*

$$
\tilde{u}(x,0) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^0 \cdots \;=\; 0 \qquad ,\; und \qquad \tilde{u}_t(x,0) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^0 \cdots \;=\; 0.
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 9u_{xx} &= -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\
u(x,0) = 1 \qquad u_t(x,0) &= \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Methode: Löse zwei Aufgaben und setze zusammen. Genauer:

- Inhomogene DGL mit homogenen Anfangsdaten:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt} - 9\tilde{u}_{xx} &= -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\
\tilde{u}(x,0) = 0 \qquad \tilde{u}_t(x,0) &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

- Homogene DGL mit den gegebenen Anfangsdaten:

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{tt} - 9\hat{u}_{xx} &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\
\hat{u}(x,0) = 1 \qquad \hat{u}_t(x,0) &= \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

- Lösung der ursprünglichen Aufgabe: $u = \hat{u} + \tilde{u}$.

Lösung:

- $\tilde{u}_{tt} - 9\tilde{u}_{xx} = -4x$ $\quad\tilde{u}(x,0) = 0$, $\tilde{u}_t(x,0) = 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

mit $h(x,t) = -4x$ also $h(\omega,\tau) = -4\omega$

und $c = 3$

Also

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^t \left[\int_{x+3(\tau-t)}^{x-3(\tau-t)} -4\omega\, d\omega\right] d\tau = \frac{1}{6}\int_0^t -2\omega^2 \Big|_{x+3(\tau-t)}^{x-3(\tau-t)} d\tau$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^t (\underbrace{x}_{a} - \underbrace{3(\tau-t)}_{b})^2 - (\underbrace{x}_{a} + \underbrace{3(\tau-t)}_{b})^2 \, d\tau$$

$$(a-b)^2 - (a+b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$$
$$= -4ab$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{\cancel{3}}\int \cancel{-}4x\cdot\cancel{3}(\tau-t)\,d\tau = \int_0^t 4x(\tau-t)\,d\tau$$

$$= 4x\left[\frac{\tau^2}{2} - t\cdot\tau\right]_0^t = \boxed{-2xt^2 = \tilde{u}(x,t)}$$

$$\left[\frac{t^2}{2} - t^2 - 0\right]$$

- $\hat{u}_{tt} - 9\hat{u}_{xx} = 0, \qquad \hat{u}(x,0) = \underset{\overset{\|}{g(x)}}{1}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \underbrace{\cos(x)}_{h}.$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct) \right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\psi)\, d\psi$$

$$g(x) = u_0(x) = 1 \qquad\qquad h(x) = v_0(x) = \cos(x)$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[1+1\right] + \frac{1}{2.3}\int_{x-3t}^{x+3t} \cos(\psi)\, d\psi = \boxed{1 + \frac{1}{6}\left[\sin(x-3t) - \sin(x+3t)\right] = \hat{u}(x,t)}$$

- Behauptung: $u = \tilde{u} + \hat{u}$ löst die ursprüngliche Aufgabe:

$$u(x,t) = -2xt^2 + 1 + \frac{1}{6}\left[\sin(x-3t) - \sin(x+3t)\right]$$

$$u_{tt} - 9u_{xx} = -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 1 \qquad u_t(x,0) = \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nachweis: $u(x,t) = -2xt^2 + 1 + \frac{1}{6}\left[\sin(x+3t) - \sin(x-3t)\right]$

$$u(x,0) = 0 + 1 + \frac{1}{6}\left[\sin(x) - \sin(x)\right] = 1 \quad \checkmark$$

$$u_t(x,t) = -4xt + 0 + \frac{1}{6}\left[\cos(x+3t)\cdot 3 - \cos(x-3t)(-3)\right]$$

$$u_t(x,0) = 0 + 0 + \frac{1}{6}\left[3\cos(x) + 3\cos(x)\right] = \cos(x) \quad \checkmark$$

$$\underline{u_{tt}} = -4x + 0 + \frac{1}{6}\left[-\sin(x+3t)\cdot 3^2 + \sin(x-3t)(-3)^2\right]$$

$$u_{xx} = 0 + 0 + \frac{1}{6}\left[-\sin(x+3t)\cdot 1^2 + \sin(x-3t)\cdot 1^2\right]$$

$$u_{tt} - 9u_{xx} = -4x + \frac{9}{6}\left[-\sin(x+3t)\cdot \quad + \sin(x-3t)\right]$$

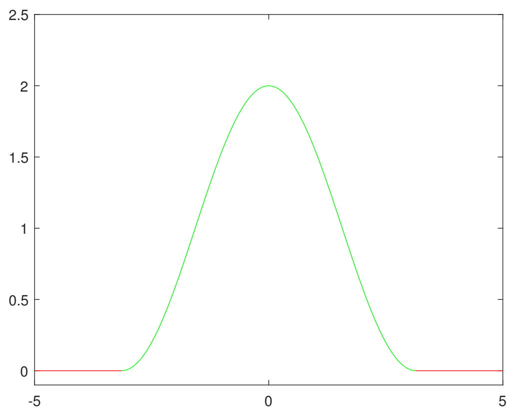
$$- \frac{9}{6}\left[-\sin(x+3t)\cdot \quad + \sin(x-3t)\right] = -4x \quad \checkmark$$

Beispiel zur Hausaufgabe 1b:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = g(x) = \begin{cases} 1 + \cos(x) & -\pi \leq x \leq \pi\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0. = h(x)$$



$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct) \right]$$

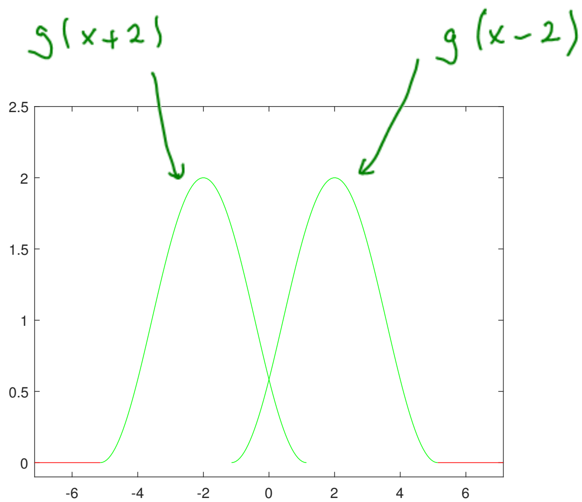
$$g(x+2t) = \begin{cases} 1 + \cos(x+2t) & -\pi \leq x+2t \leq \pi \longrightarrow -\pi - 2t \leq x \leq \pi - 2t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x-2t) = \begin{cases} 1+\cos(x-2t) & -\pi \le x-2t \le \pi \iff x \in [-\pi+2t, \pi+2t] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Zum Beispiel für $t = 1$:

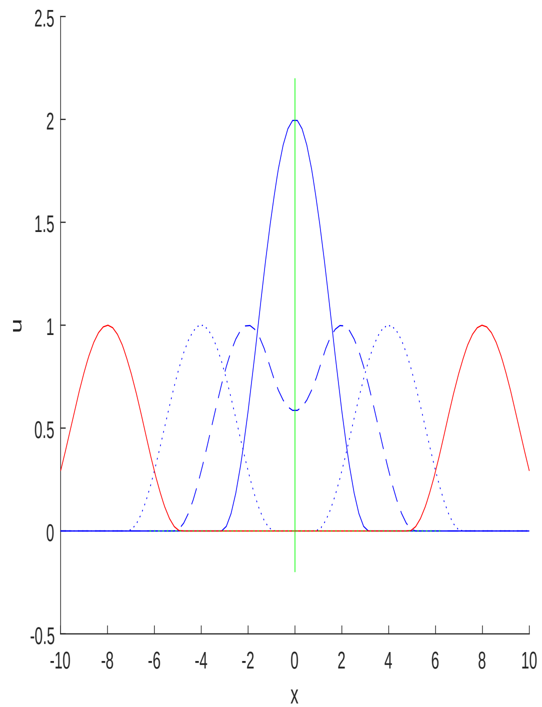
$$g(x+2) = \begin{cases} 1+\cos(x+2) & -\pi-2 \leq x \leq \pi-2 \\ 0 & \end{cases}$$

$$g(x-2) = \begin{cases} 1+\cos(x-2) & -\pi+2 \leq x \leq \pi+2 \\ 0 & \end{cases}$$



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq -\pi-2 \\ 1+\cos(x+2) & -\pi-2 \leq x \leq -\pi+2 \\ 1+\cos(x+2)+1+\cos(x-2) & -\pi+2 \leq x \leq \pi-2 \\ 1+\cos(x-2) & \pi-2 \leq x \leq \pi+2 \\ 0 & \pi+2 \leq x \end{cases}$$

für $t = 0, 1, 2, 4,$

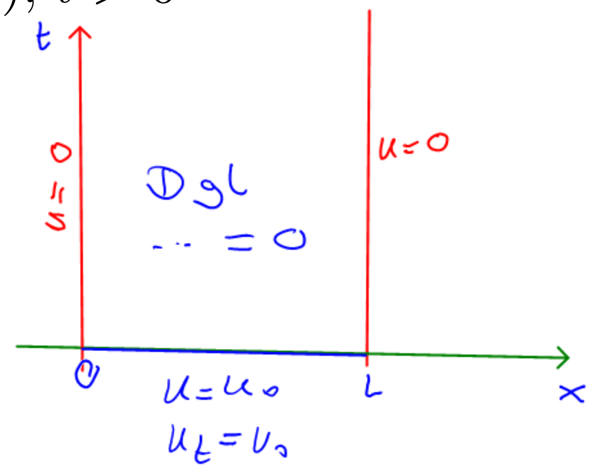


1: gestrichelt, 2: gepunktet, 4: rot

Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

zunächst : **homogene** Dgl. mit homogenen Randdaten

$$
\begin{array}{rcll}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &=& 0 & c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x,0) &=& u_0(x) & x \in (0, L), \\
u_t(x,0) &=& v_0(x) & x \in (0, L), \\
u(0,t) &=& 0 & t > 0, \\
u(L,t) &=& 0 & t > 0,
\end{array}
$$



Produktansatz $u(\overset{0}{x},t) = p(\overset{0}{x}) \cdot q(t)$ liefert $\underbrace{p(x) \cdot \ddot{q}(t)}_{u_{tt}} = \underbrace{c^2 p''(x) \cdot q(t)}_{u_{xx}}$

hängt nur von x ab

hängt nur von t ab

$$\frac{p''}{p} = \frac{\ddot{q}}{c^2 q} = -\lambda \leftarrow \text{Konstant}$$

$\longrightarrow$ zwei gewöhnliche Dgl für p und q

$p'' = -\lambda p$ und $\ddot{q} = -\lambda c^2 q$

wie in HÜ 5

Die homogenen Randbedingungen liefern exakt wie bei der Wärmeleitungsgleichung

$$u(0,t) = p(0)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(0) = 0 \vee q \equiv 0$$

$q \not\equiv 0$ sonst $u \equiv 0$ also "triviale" Lösung

$$u(L,t) = p(L)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(L) = 0 \vee q \equiv 0$$

die Randwertaufgabe:

$$p''(x) = -\lambda p(x), \qquad p(0) = p(L) = 0$$

Die einzigen nichttrivialen Lösungen sind (vgl.HÜ 5). $\sin(k \frac{\pi}{L} x)$

$$\boxed{p_k(x) = \sin(k\omega x) \qquad \omega = \pi/L, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\omega)^2, \quad k \in \mathbb{N}}$$

$$p_k''(x) = -\sin(k\omega x)\underbrace{(k\omega)^2}_{\lambda_k}$$

Die Differentialgleichungfür q lautet dieses mal:

$$\ddot{q} = -\lambda c^2 q = -(ck\omega)^2 q$$

$\ddot{q} + (ck\omega)^2 q = 0 \longrightarrow P(\mu) = \mu^2 + (ck\omega)^2 = 0$

$\mu = \pm\sqrt{-(ck\omega)^2} = \pm ick\omega$

Lösungen $e^{\pm ick\omega t}$

$e^{ick\omega t} = \cos(ck\omega t) + i\sin(ck\omega t)$

reelle Lösungen

und liefert

$$\boxed{q_k(t) = A_k\cos(ck\omega t) + B_k\sin(ck\omega t)}$$

$$u_k(x,t) := q_k(t)\cdot p_k(x), \qquad k \in \mathbb{N} \text{ löst DGL + erfüllt Randbedingungen.}$$

DGL homogen und linear, RB'n homogen $\longrightarrow$ Superposition erlaubt

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\left(A_k\cos(ck\omega t) + B_k\sin(ck\omega t)\right)\cdot\sin(k\omega x)}$$

löst DGL + RB'n.

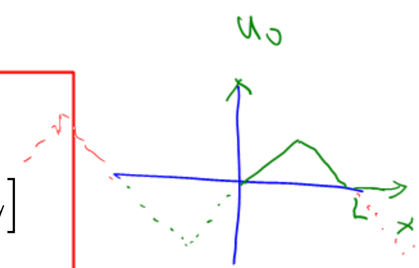
Zu erfüllen sind mit $u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$

die Anfangsbedingungen.

$$\underline{u(x,0)} = \sum_{k=1}^{n} \big(A_k \underbrace{\cos(0)}_{1} + \cancel{B_k \underbrace{\sin(0)}_{0}}\big) \cdot \sin(k\omega x) \overset{!}{=} \underline{u_0(x)} \qquad x \in [0, L]$$

Für $n \to \infty$ erhält man

$$\boxed{u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0, L]}$$



$u_0(-x) = -u_0(x)$

Die A_k sind bei glatten Anfangswerten die Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von u_0

$$\boxed{A_k = \underbrace{\frac{2}{L}}_{\frac{4}{T}} \int_0^{\overset{T/2}{L}} u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha}$$

$T = 2L$

Die zweite Anfangsbedingung lautet für

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{0}^{\infty} \Big[-ck\omega \cdot \underbrace{\sin(ck\omega t)}_{\text{für Null} = 0} + ck\omega \cdot B_k \underbrace{\cos(ck\omega t)}_{\text{für Null} = 1} \Big] \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

mit den Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha$$

muss also gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ck\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = V_0(x)$$

$$B_k c k \frac{\pi}{L} = B_k c \cdot k\omega \stackrel{!}{=} b_k$$

$$B_k = \frac{b_k}{ck\frac{\pi}{L}} = \frac{b_k}{ck\omega}$$

oder $\quad B_k = \frac{L}{ck\pi} b_k = \frac{\cancel{L}}{ck\pi} \cdot \frac{2}{\cancel{L}} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(k \frac{\pi}{L} \alpha\right) d\alpha$

Damit erhalten wir die Lösung

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

$$\boxed{A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha, \qquad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha}$$

$L \qquad \omega = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$

Beispiel:

$$u_{tt} - \overset{2}{1} u_{xx} = 0 \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 2\sin(4x) \qquad x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$u(0,t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \qquad t > 0,$$

Hier gilt: $L = \frac{\pi}{2}$, $\underline{\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\pi/2} = 2}$, $\underline{c = 1}$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\overset{1}{c}k\overset{2}{\omega}t) + B_k \sin((\overset{1}{c}k\overset{2}{\omega}t)] \sin(k\overset{2}{\omega}x),$$

Wie oben:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) \overset{!}{=} \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Die zweite Anfangsbedingung liefert

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \underbrace{\sin(k\overset{2}{\omega}x)}_{\sin(2kx)} = 2\sin(4x)$$

für $k=2$
$\sin(4x)$

Wobei $\omega = 2, \quad c = 1.$

$k=2$: $B_2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \overset{!}{=} 2$

Man liest unmittelbar ab:

$$\boxed{\begin{array}{c} B_2 = \frac{1}{2} \\ B_k = 0 \quad \forall\, k \neq 2 \end{array}}$$

Die erste Anfangsbedingung verlangt

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(2kx) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Für die A_k rechnet man

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\cdot\sin\big(\overset{w}{2k}x\big)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\sin(2kx)}_{g'}dx \;+\; \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\frac{\pi}{2}-x)}_{\tilde{f}}\,\underbrace{\sin(2kx)}_{g}dx \\
&= \frac{4}{\pi}\Big\{\Big[\underbrace{x}_{f}\underbrace{(-\frac{\cos(2kx)}{2k})}_{g}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{(1)}_{f'}\cdot\underbrace{\left(-\frac{\cos(2kx)}{2k}\right)}_{g}dx \\
&\quad + \Big[\underbrace{(\frac{\pi}{2}-x)}_{\tilde{f}}\underbrace{(-\frac{\cos(2kx)}{2k})}_{g}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-1)}_{\tilde{f}'}\underbrace{\left(-\frac{\cos(2kx)}{2k}\right)}_{g}dx\Big\}
\end{aligned}$$

$$\int \sin(\gamma x)\,dx = \frac{-\cos(\gamma x)}{\gamma} + C$$

$$\int \cos(\gamma x)\,dx = \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma} + C$$

⋮

$$\boxed{= \frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = A_k}$$

Damit erhält man

$c = 1 \qquad \omega = 2$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ck\omega t) + \underset{2}{B_k} \sin((c\overset{2}{k}\omega t)\right] \sin(\overset{2}{k}\omega x) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(ck\omega t)\sin(k\omega x)\right] + \underline{B_2 \sin(2\overset{2}{c}\omega t)\sin(2\overset{2}{\omega} x)} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(2kt)\sin(2kx)\right] + \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(4x) \\
&= \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(4x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(2kt)\sin(2kx)\cdot
\end{aligned}
$$

Inhomogene Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in [0,L], \\
u_t(x,0) &= w_0(x) && x \in [0,L], \\
u(0,t) &= h(t) && t \geq 0, \\
u(L,t) &= g(t) && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

Verfahre wie in HÜ 5 :

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[h(t) + \frac{x}{L}(g(t) - h(t))\right]$$

Führt zu $v(0,t) = v(L,t) = 0$.

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[h(t) + \frac{x}{L}(g(t) - h(t))\right]$$

$$u_{tt}(x,t) = v_{tt} + \ddot{h}(t) + \frac{x}{L}\left[\ddot{g}(t) - \ddot{h}(t)\right]$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte aber **homogene Randdaten**

$$v_{tt} + \ddot{h}(t) + \frac{x}{L}\,(\ddot{g}(t) - \ddot{h}(t)) - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - h(0) - \frac{x}{L}\,(g(0) - h(0)) =: v_0(x).$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - \dot{h}(0) - \frac{x}{L}\,(\dot{g}(0) - \dot{h}(0)) =: \hat{v}_0(x).$$

$$v(0,t) = 0\,, \qquad v(L,t) = 0\,.$$

Beispiel: Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{cases} u_{tt} = \overset{c^2}{4} u_{xx} & 0 < x < \overset{L}{1},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = x - \sin(\pi x) = u_0 & 0 \le x \le 1\,, \\ u_t(x,0) = \sin(2\pi x) = v_0 & 0 \le x \le 1\,, \\ u(0,t) = 0 = h & t \ge 0\,, \\ u(1,t) = 1 = g & t \ge 0\,. \end{cases}$$

Überführen Sie die Aufgabe durch die Einführung einer geeigneten Funktion v in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen für v.

Lösen Sie die ARWA für v.

Geben Sie die Lösung der ARWA für u an.

Schritt 1) Randwerte auf Null setzen:

$$v(x,t) := u(x,t) - \overset{0}{h(t)} - \frac{x}{L}\left(\overset{1}{g(t)} - \overset{0}{h(t)}\right)$$

$$= u(x,t) - 0 - \frac{x}{1}(1-0) = u(x,t) - x\,\cdot$$

$$\boxed{v(x,t) = u(x,t) - x}$$

$v_t = u_t$

$u(x,t) = v(x,t) + x$

$u_{xx} = v_{xx}$

$u_{tt} = v_{tt}$

$v_{xx} = u_{xx}$ $\qquad\qquad$ $v_{tt} = u_{tt}$

Schritt 2) Neue Aufgabe: Alle u Ausdrücke in alter RWA durch v Ausdrücke ersetzen.

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= 4v_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x,0) &= \underbrace{u(x,0)}_{x - \sin(\pi x)} - x = -\sin(\pi x) && 0 \le x \le 1, \\
v_t(x,0) &= u_t(x,0) = \sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1, \\
v(0,t) &= \underbrace{u(0,t)}_{0} - 0 = 0 && t \ge 0, \\
v(1,t) &= \underbrace{u(1,t)}_{1} - 1 = 0 && t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 3) Lösung der ARWA für v.: Formel aus Seite 22 verwenden

Mit $c = 2, \quad L = 1$ $\qquad$ $\omega = \frac{\pi}{1} = \pi$

$$
v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(c k \overset{\omega}{\frac{\pi}{L}} t) + B_k \sin(c k \overset{\omega}{\frac{\pi}{L}} t) \right] \sin(k \overset{\omega}{\frac{\pi}{L}} x)
$$

c und L bzw. ω einsetzen

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi t) \; + \; B_k \sin(2k\pi t)\right] \sin(k\pi x)$$

Anfangsbedingung aufschreiben

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \overset{!}{=} -\sin(\pi x) = u_0(x)$$

wenn möglich: Koeffizientenvergleich

$k=1: \quad A_1 = -1$

$k \neq 1: \quad A_k = 0$

$$v_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2k\pi A_k \sin(2k\pi\, t) \; + \; 2k\pi B_k \cos(2k\pi\, t)\right] \sin(k\pi x)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k\pi \cdot B_k \cdot \sin(k\pi x) \overset{!}{=} \sin(2\pi x) = v_0(x)$$

$k=2 \quad : \quad 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot B_2 = 1 \quad \Longrightarrow B_2 = \frac{1}{4\pi}$

$k \neq 2 \quad : \quad B_k = 0$

und damit

$$v(x,t) \; = \underbrace{\overset{-1}{\overset{\|}{A_1}} \cos\left(2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot t\right) \sin\left(1 \cdot \pi \, x\right)}_{\sum A_k \cos(ck\pi t) \sin(k\pi x)} + \underbrace{\overset{\frac{1}{4\pi}}{\overset{\|}{B_2}} \sin\left(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) \sin\left(2 \cdot \pi \cdot x\right)}_{\sum B_k \sin(ck\pi t) \sin(k\pi x)}$$

also

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t)\sin(2\pi x) - \cos(2\pi t)\sin(\pi x)$$

Schritt 4) Lösung der ARWA für u.:

Die Lösung der ursprünglichen RWA lautet also

$$u(x,t) = v(x,t) + x = x + \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t)\sin(2\pi x) - \cos(2\pi t)\sin(\pi x)$$

Der Vollständigkeit halber:

Inhomogene Differentialgleichung, homogene Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}$$

Ansatz wie in HÜ 5

Einsetzen in die Differentialgleichung führt bei glm. Konvergenz der Reihen auf einen Satz von AWA'n für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\ddot{q}_k(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) = d_k(t)\,, \qquad \underbrace{q_k(0) = a_k,\ q_k'(0) = b_k}_{\text{Ergeben sich aus Anfangsbedingungen}}$$

z. B.

$$u(x,0) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} q_k(0) \sin(k\omega x)}_{\text{Sinusreihe}} \overset{!}{=} u_0(x)$$

wie oben Fourier-Koeff'n von ungerader, 2L-periodischer Fortsetzung von u_0 berechnen → siehe an

$$\textit{Mit: } a_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$d_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Fourier-Koeffizienten (evtl. über Koeffizientenvergleich) berechnen und System gewöhnlicher Differentialgleichungen lösen.