Hörsaalübung zu Blatt5 Differentialgleichungen II
Produktansätze für
Wärmeleitungs- und Laplacegleichung

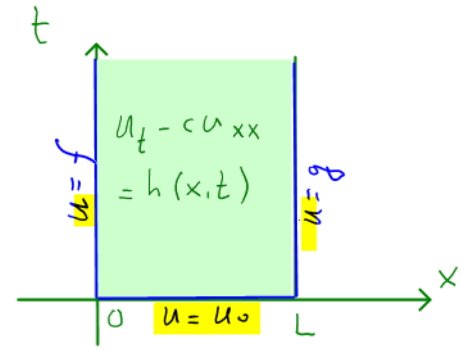
Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Liebe Studierende der Letzte Teil ist gekürzt und umgestellt. Wegen der technischen Probleme haben wir ja nicht alles geschaft. Was hier vorliegt genügt für die Übungen!

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

Ziel ist die Lösung von:

$$
\begin{aligned}
u_t - c u_{xx} &= h(x,t) & & c > 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \text{ bei uns } (0,L) \\
u(x,0) &= u_0(x) & & x \in (a,b), \\
u(a,t) &= f(t) & & t > 0, \\
u(b,t) &= g(t) & & t > 0,
\end{aligned}
$$

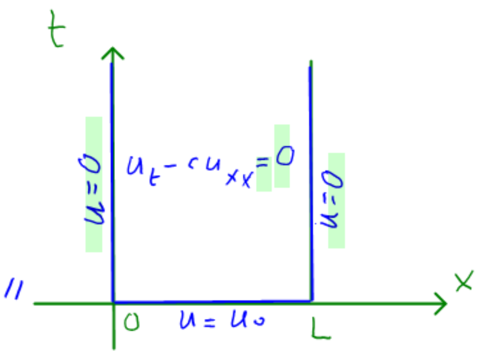


c : Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Zunächst lösen wir für **Problem I)**

homogene DGL, homogene Randwerte, inhomogene Anfangswerte

$$
\begin{aligned}
&\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 && c > 0,\ t > 0,\ x \in]0, L[,\ L > 0, \\
&\tilde{v}(x,0) = v_0(x) && x \in (0, L) \\
&\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(L,t) = 0 && t > 0\,.
\end{aligned}
$$



v_0 nicht identisch Null, d.h $\tilde{v}$ nicht identisch Null!

Produktansatz: $\tilde{v}(x,t) = q(t) \cdot p(x)$

$\tilde{v}_t = \dot{q} \cdot p$

$\tilde{v}_{xx} = q \cdot p''$

Einsetzen in DGL:

$$\underbrace{\dot{q}(t) \cdot p(x)}_{\tilde{v}_t} \underbrace{- c \cdot q(t) \cdot p''(x)}_{-c\tilde{v}_{xx}} = 0$$

$$\frac{\dot{q} \cdot p}{p \cdot q} = \frac{c q \cdot p''}{p \cdot q} \qquad \cdot \frac{1}{p \cdot q}$$

Umsortierung ergibt:

$$\underbrace{\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = c \underbrace{\frac{p''(x)}{p(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} = k = -c\lambda$$

geht nur wenn beide konstant sind

$\longrightarrow$ zwei gewöhnliche Dgl

$$\frac{\dot{q}}{q} = -c\lambda$$

$$\frac{p''}{p} = -\lambda$$

Zunächst: $p''(x) = -\lambda \cdot p(x)$ (vgl. Vorlesung Seite 85-88)

Randbedingungen:

$\forall t > 0$

$$\underbrace{\tilde{v}(0,t)}_{} = \underbrace{q(t)}_{\neq 0} \cdot p(0) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow p(0) = 0$$

$$\tilde{v}(L,t) = q(t) \cdot p(L) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow p(L) = 0$$

$p(\mu) =$

DGL: $p'' + \lambda \cdot p = 0 \longrightarrow$ Charakteristisches Polynom: $\mu^2 + \lambda = 0$

$\mu = \pm\sqrt{-\lambda} \longrightarrow$ allgemeine Lösung $ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

Außer für doppelte Nullstellen! Hier $\lambda = 0$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow p(x) = a_0 e^{\sqrt{-0}x} + b_0 x e^{\sqrt{-0}x} = a_0 + b_0 x,$$

Randbeding.

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0 \\ p(L) = 0 \Longrightarrow b_0 \cdot \underset{\neq 0}{L} = 0 \Longrightarrow b_0 = 0 \end{array}\right\} p \equiv 0 \ \lightning$$

$\lambda < 0 \Longrightarrow p(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$p(0) = 0 \Longrightarrow ae^0 + be^0 = 0 \quad \Longrightarrow b = -a$$

$$p(L) = 0 \Longrightarrow ae^{\sqrt{-\lambda}L} + be^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$$

$$a\left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}\right) = 0 \Longrightarrow \sqrt{-\lambda}L = -\sqrt{-\lambda}L$$

$$L = 0 \quad \vee \quad \lambda = 0$$

$$\lambda > 0 \Longrightarrow p(x) = \hat{a}e^{\sqrt{-\lambda}x} + \hat{b}e^{-\sqrt{-\lambda}x} \qquad \sqrt{-\lambda} = \sqrt{(-1)\lambda} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\lambda} = i\sqrt{\lambda}$$

$$p(x) = \hat{a}e^{i\sqrt{\lambda}x} + \hat{b}e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

reelle Darstellung: $p(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

Randbedingungen:

$$p(0) = 0 \Longrightarrow a\cos(0) + b\sin(0) = \boxed{a = 0}$$

$$p(L) = 0 \Longrightarrow b\sin(\sqrt{\lambda}\,L) = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow p \equiv 0 \quad \vee \quad \sqrt{\lambda}L = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{(-k)\pi}{L}\right)^2$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

genügt

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2\omega^2, \qquad n \in \mathbb{N}, \omega := \frac{\pi}{L}}$$

Zugehörige Lösungen: $\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

$$\frac{\dot{q}_n(t)}{q_n(t)} = c\,\frac{p_n''(x)}{p_n(x)} = -c \cdot \lambda_n \iff \dot{q}_n(t) = -c\lambda_n q_n(t)$$

$$\boxed{q_n(t) = e^{-c\lambda_n t} = e^{-c\omega^2 n^2 t}}$$

Jede Funktion $\boxed{\tilde{v}_n(t) = p_n(x) \cdot q_n(t) = \sin(n\omega x)\, e^{-c\omega^2 n^2 t}}$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randwerte!

Jede Linearkombination $\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randwerte!

Denn auf dem Rand:

$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(0) = \alpha_n \cdot \overbrace{\tilde{v}_n(0)}^{0} + \alpha_m \cdot \overbrace{\tilde{v}_m(0)}^{0} = 0$$

$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(L) = \alpha_n \cdot \underbrace{\tilde{v}_n(L)}_{0} + \alpha_m \cdot \underbrace{\tilde{v}_m(L)}_{0} = 0$$

Differentialgleichung :

$$\begin{aligned}
&(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_t - c\,(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_{xx} \\
&\quad = \alpha_n \cdot (\tilde{v}_n)_t + \alpha_m \cdot (\tilde{v}_m)_t - c\alpha_n (\tilde{v}_n)_{xx} - c\alpha_m (\tilde{v}_m)_{xx} \\
&\quad = \alpha_n \, (\underbrace{(\tilde{v}_n)_t - c(\tilde{v}_n)_{xx}}_{0}) + \alpha_m \, (\underbrace{(\tilde{v}_m)_t - c(\tilde{v}_m)_{xx}}_{=0}) = 0
\end{aligned}$$

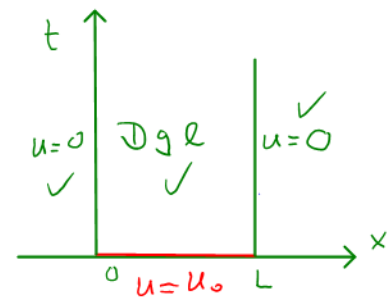
Frage: Wären Linearkombis von Lösungen auch bei inhomogener Dgl und/oder inhomogenen Randwerten auch Lösungen?

Jede endliche Linearkombination

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

$q_n \cdot p_n$

löst die Differentialgleichung und erfüllt die Randbedingungen.



Zu erfüllen bleibt noch die Anfangsbedingung, die verlangt:

$$\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \underbrace{e^{-c\omega^2 n^2 \cdot 0}}_{1} \sin(n\omega x) \overset{!}{=} v_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

Also $$\boxed{\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cdot \sin(n\omega x) \overset{!}{=} v_0(x) \qquad x \in (0,L)}$$

Dies geht nur für spezielle v_0.

Idee für beliebiges v_0: Gehe zur Reihe über (∞ statt m) und Wähle: α_n als Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0. Siehe nächste HÜ. Hier spezielle v_0.

Problem II) Inhomogene DGL, inhomogene Rand- und Anfangswerte

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t) \qquad c > 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \text{ bei uns } (0,L)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in (a,b),$$

$$u(a,t) = f(t) \qquad t > 0,$$

$$u(b,t) = g(t) \qquad t > 0,$$

$c:$ Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Beispiel:

$c \simeq 1$

$$u_t - u_{xx} = \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$L \qquad \omega = \frac{\pi}{L} \simeq 1$

$$u(x,0) = 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) \qquad 0 < x < \pi\,,$$

$$u(0,t) = \frac{1}{t+1} \simeq f(t) \qquad t > 0,$$

$$u(\pi,t) = 0 \simeq g(t) \qquad t > 0.$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$(*) \quad v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t)) \right]$$

$$v(0,t) = \underbrace{u(0,t)}_{f(t)} - f(t) - \frac{0}{L}(g(t) - f(t)) = 0$$

$$v(L,t) = u(L,t) - f(t) - \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}(g(t) - f(t)) = g(t) - f(t) - g(t) + f(t) = 0$$

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t)) \right]$$

$$u_t(x,t) := v_t(x,t) + \dot{f}(t) + \frac{x}{L}(\dot{g}(t) - \dot{f}(t))$$

$$u_x(x,t) := v_x(x,t) + 0 + \frac{1}{L}(g(t) - f(t))$$

$$v_t + \underbrace{\dot{f}(t) + \frac{x}{L}(\dot{g}(t) - \dot{f}(t))} - c\, v_{xx} = h(x,t)$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$ immer bei Homogenisierung mit t (*)

DGL : $\quad v_t - cv_{xx} = h(x,t) - \dot f(t) - \frac{x}{L}\left(\dot g(t) - \dot f(t)\right) =: \tilde h(x,t)$

Neue Anfangswerte für: $v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$

* mit t=0

$$v(x,0) = u(x,0) - f(0) - \frac{x}{L}\left(g(0) - f(0)\right) =: v_0(x).$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte, **homogene Randdaten**

Beispiel:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) && 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) && 0 < x < \pi\ /\ L, \\ u(0,t) &= \frac{1}{t+1} = f(t) && t > 0, \\ u(\pi,t) &= 0 = g(t) && t > 0. \end{aligned}$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$(*) \quad v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$$

$$= u(x,t) - \frac{1}{t+1} - \frac{x}{L}\left(0 - \frac{1}{1+t}\right) = u(x,t) + \frac{1}{t+1}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) - \frac{1}{t+1}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)}$$

(**) Neue Aufgabe für $v(x,t) = u(x,t) + \frac{1}{t+1}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)$

DGL für u: $u_t - u_{xx} = \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x)$

$\cancel{v}_t(x,t) = v_t(x,t) + \frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)$ (u_t)

rechte Seite der ursprünglichen Dgl

$u_t - u_{xx} = v_t + \cancel{\frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{x-\pi}{\pi}\right)} - v_{xx} \overset{!}{=} \cancel{\frac{x-\pi}{\pi(t+1)^2}} + 4\sin(2x)$

Dgl $\quad v_t - v_{xx} = 4\sin(2x)$

$v(x,0) \overset{(**)}{=} \underbrace{u(x,0)} + \frac{1}{0+1}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) = \underbrace{1 - \cancel{\frac{x}{\pi}} + \sin(6x)} + \cancel{\frac{x}{\pi} - 1} = \sin(6x) = v_0(x)$

$v(0,t) \overset{(**)}{=} u(0,t) - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = 0$ ✓

$v(\pi,t) = \underbrace{u(\pi,t)}_{0} + \frac{1}{t+1}\underbrace{\left(\frac{\pi}{\pi} - 1\right)}_{0} = 0.$ ✓

Schritt 2)

$$\begin{aligned} v_t - c\, v_{xx} &= \tilde{h}(x,t) \\ v(x,0) &= v_0(x) \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0\,. \end{aligned}$$

homogen !

homogene Randwerte werden erfüllt von: $\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

Wir machen den Ansatz: $\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{m} a_n(t) \sin(n\omega x)}$

$v_t = \sum \dot{a}_n(t) \sin(n\omega x)$

$v_x = \sum a_n(t) n\omega \cos(n\omega x)$

Einsetzen in die DGL $v_t - c v_{xx} = \tilde{h}(x,t)$

$v_{xx} = \sum a_n(t)(-n^2\omega^2) \sin(n\omega x)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m} \left[\dot{a}_n(t) + c n^2\omega^2 a_n(t)\right] \sin(n\omega x) = \tilde{h}(x,t)}$$

Die Lösung muss auch noch die Anfangswerte erfüllen

$$\boxed{v(x,0) = \sum_{n=1}^{m} a_n(0) \sin(n\omega x) \overset{!}{=} v_0(x)}$$

Idee für beliebiges $\tilde{h}, v_0$: Gehe zu Reihen über (∞ statt m) und ersetze die rechten Seiten durch die Fourier Reihen der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von $\tilde{h}$ bzw. v_0. Erhalte AWA mit gewöhnlichen DGL für die a_n. Berechnung der Fourier Koeffizienten nächste HÜ. Hier spezielle $\tilde{h}, v_0$.

Schritt 3: Zusammensetzen zur Lösung des ursprünglichen Problems :

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

Schritt 2 für unser Beispiel:

$c=1$ $\quad L=\pi \quad \omega=1$

$$v_t - v_{xx} = \underline{4\sin(2x)}, \qquad x \in (0,\pi),\ t>0$$

$$\underline{v(x,0) = \sin(6x)} \qquad x \in [0,\pi]$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{m} a_n(t) \sin(n\omega x)$$

Einsetzen in die DGL $v_t - c v_{xx} = \tilde{h}(x,t)$, ergibt

Dgl verlangt:
$$\sum_{n=1}^{m} \left[\dot{a}_n(t) + \overset{1}{c} n^2 \overset{1}{\omega}^2 a_n(t)\right] \sin(n\overset{1}{\omega} x) = \tilde{h}(x,t)$$

mit

$$c = 1,\ \tilde{h}(x,t) = 4\sin(2x),\ L = \pi \text{ also } \omega = 1$$

also

$$\sum_{n=1}^{m} \left[\dot{a}_n(t) + n^2 a_n(t)\right] \sin(nx) = 4\sin(2x)$$

Koeffizientenvergleich liefert die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\rightarrow \quad \dot{a}_2(t) + 2^2 a_2(t) = 4$$

$$\dot{a}_n(t) + n^2 a_n(t) = 0 \qquad \forall n \neq 2$$

Die Lösung

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{m} a_n(t) \sin(nx)$$

muss auch noch die Anfangswerte erfüllen

$$v(x,\overset{t}{0}) = \sum_{n=1}^{m} a_n(0) \sin(nx) = v_0(x) = 1\sin(6x)$$

Koeffizientenvergleich liefert die Anfangswerte für unsere Differentialgleichungen

$$a_6(0) = 1$$

$$a_n(0) = 0 \qquad \forall n \neq 6$$

Insgesamt erhalten wir folgende Anfangswertaufgaben

$$\dot{a}_n(t) + n^2 a_n(t) = 0,\ a_n(0) = 0 \qquad \forall n \notin \{2, 6\}$$

$$a_n(t) \equiv 0$$

Mit den Lösungen $a_n(t) \equiv 0 \qquad \forall n \in \{2, 6\}$

Und

$\underline{\dot{a}_6(t) + 6^2 a_6(t) = 0}, \ \underline{a_6(0) = 1}$ $\qquad \dot{a}_6(t) = -36 a_6(t)$

$$\Longrightarrow a_6(t) = k\, e^{-36t}$$

$$a_6(0) = k e^0 = k \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \boxed{a_6(t) = 1 \cdot e^{-36t}}$$

$\underline{\dot{a}_2(t) + 2^2 a_2(t) = 4}, \ \underline{a_2(0) = 0}$

$$\dot{a}_{2,h}(t) = -4 a_{2,h}(t) \Longrightarrow a_{2,h}(t) = k \cdot e^{-4t}$$

Ansatz: $a_{2,p}(t) = k(t)\, e^{-4t} \xrightarrow{\text{Dgl}} \dot{k}(t)\, e^{-4t} \overset{!}{=} 4$

$$\Longrightarrow \dot{k}(t) = 4 e^{4t} \Longrightarrow \text{z.B. } k(t) = e^{4t}$$

$$\Longrightarrow a_{2,p}(t) = k(t) e^{-4t} = e^{4t} \cdot e^{-4t} = 1$$

Lösung: $v(x, t) =$

$$a_2(t) = a_{2h} + a_{2p} = k\, e^{-4t} + 1$$

$$\underline{a_2(0) = 0} \Longrightarrow k e^0 + 1 = 0 \Longrightarrow k = -1$$

$$\Longrightarrow a_2(t) = 1 - e^{-4t}$$

$v(x,t) = a_2(t)\sin(2x) + a_6(t)\sin(6x) = (1-e^{-4t})\sin(2x) + e^{-36t}\sin(6x)$

Schritt 3 für unser Beispiel:

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

mit $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $g(t) = 0$, $L = \pi$.

$u(x,t) = (1-e^{-4t})\sin(2x) + e^{-36t}\sin(6x) + \frac{1}{t+1} + \frac{x}{\pi}\left(0 - \frac{1}{t+1}\right)$

Hinweis zur Hausaufgabe 2a:

$$\frac{\dot q(t)}{q(t)} = c\,\frac{p''(x)}{p(x)} = \cancel{\mu}\ -c\lambda$$

Also $\dot q(t) = \cancel{\mu}\,{-c\lambda}\, q(t)$

$x-$ Anteil: linear, exponentiell oder periodisch.

Führe die Diskussion analog zu den Seiten 3-7 durch, nur mit

$p'(0) = p'(L) = 0$ statt mit $p(0) = p(L) = 0$.

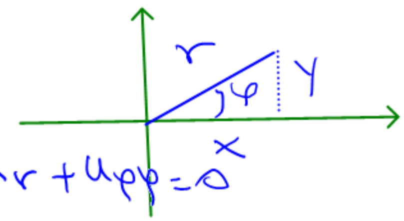
Gehe von der Summe zur Reihe über, also ∞ statt m.

Laplace-Gleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

$x = r\cos(\varphi)$

$y = r\sin(\varphi)$

Laplace Operator in Polarkoordinaten:



$$\boxed{\Delta u = 0 \overset{r\neq 0}{\iff} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0\,.}$$

$\overset{r\neq 0}{\iff} r^2 u_{rr} + r\cdot u_r + u_{\phi\phi} = 0$

Im **rotationssymmetrischem** Fall: $u(r,\phi) = w(r)$ gilt $u_{\phi\phi} = 0\,.$

Zu lösen: $\quad r^2 \overset{w''}{u_{rr}} + r\overset{w'}{u_r} = 0 \qquad r^2 g'' + rg' = 0$

Setze $g := w'$. Dann ist zu lösen: $rg'(r) + g(r) = 0 \qquad r\cdot\frac{dg}{dr} = -g$

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{g}{r} \iff \int\frac{dg}{g} = -\int\frac{dr}{r}$$

$$\ln(|g|) = -\ln(r) + k \iff \cancel{e^{\ln(|g|)}} = e^{-\ln(r)+k} = e^{-\ln(r)}\cdot e^k = \frac{1}{e^{\ln(r)}}\cdot e^k$$

$g = \frac{1}{r}\cdot\alpha$

$$w' = g = \alpha\cdot\frac{1}{r} \implies \boxed{w(r) = \alpha\cdot\ln(r) + \beta}$$

Vgl. Darstellung mit der Fundamentallösung aus letzter HÜ

Im nicht rotationssymmetrischem Fall:

Ansatz: $u(r,\phi) = w(r) \cdot v(\phi)$

$u_r = w' \cdot v$ $\qquad u_\varphi = w \cdot v''$

$u_{rr} = w'' \cdot v$

Zu erfüllen: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.$

Neue Dgl.: $r^2 w'' \cdot v + r w' \cdot v + w \cdot v'' = 0$

Sortieren nach v und w: $\dfrac{v(r^2 w'' + r w')}{v.} = \dfrac{-w \cdot v''}{w \cdot v}$ $\quad \Big| \dfrac{1}{v \cdot w}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{r^2 w'' + r w'}{w}}_{\text{hängt nur von } r \text{ ab}} = -\underbrace{\frac{v''}{v}}_{\text{hängt nur von } \varphi \text{ ab}} = \lambda.$$

$v'' = -\lambda v$

$r^2 w'' + r w' = \lambda w$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) = -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda w = 0}$$

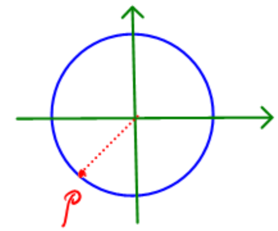
Zunächst $v''(\phi) = -\lambda v(\phi)$: Lösungen sind (siehe oben)

$\lambda = 0$: lineare Funktion

$\lambda < 0$: reelle exp-Funktionen

$\lambda > 0$: Cosinus- und Sinus-Funktionen

v sollte $2\pi-$periodisch sein, daher kommen nur in Frage $\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$



$u(P) = u(r, -\frac{3\pi}{4})$ $= u(r, 5\pi/4)$

mit zugehörigen $\lambda_k = k^2$ und

und für $\lambda = 0$ die konstante Fkt

$$\boxed{v_k(\phi) = a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

Gleichung für die passenden w_k lautet

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda_k w = r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$$

$\underline{k=0:}$ $\qquad r^2 w''(r) + r w'(r) = 0$ erhalte wie oben mit $g := w'$

$$r g'(r) + g(r) = 0 \iff r \cdot \frac{dg}{dr} = -g \iff \frac{dg}{g} = -\frac{dr}{r}$$

$$w' = g = \frac{d_0}{r} \implies \boxed{w_0 = c_0 + d_0 \ln(r)\,.}$$

$\underline{k \neq 0:}$ Eulersche Dgl.: $\qquad r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$

Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

$$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$$

$$\iff r^\gamma \left(-k^2 + \gamma + \gamma^2 - \gamma\right) = 0 \iff \gamma = \pm k$$

Lösungen r^{-k}, r^{k}

und damit $\qquad \boxed{w_k(r) = c_k r^{-k} + d_k r^k}$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL.

Da die Dgl linear ist, ist Jede Linear Kombination auch eine Lösung

$$u(r,\phi) = \underbrace{c_0 + d_0 \ln(r)}_{v_0\, w_0} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(c_k r^{-k} + d_k r^k)}_{w_k} \underbrace{(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}_{v_k}$$

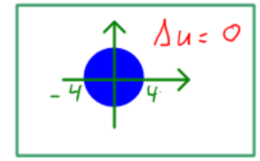
Ohne Diskussion der Konvergenz, schreiben wir

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden. Siehe unten.

Beispiel:

$\Delta u = 0$, für $x^2 + y^2 > 16$, $\qquad u(x,y) = 1 + xy - 2y^2$, auf $x^2 + y^2 = 16$.



Allgemeine Lösung:

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \overset{r\to\infty:\ \infty}{\ln(r)} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k \overset{r\to\infty:\ \infty}{r^k})(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Vorgehensweise auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k$.

Von unserem Ansatz bleibt:

$$u(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung

$u(R,\phi) = u_R(\phi) =$ vorgegebene Randfunktion umgerechnet in Polarkoordinaten

Zurück zum Beispiel:

Zu erfüllen ist die RB:

$$u(x,y) = 1 + xy - 2y^2, \text{ auf } x^2 + y^2 = \underset{r^2}{\underset{\parallel}{16}}$$

Randfunktion umrechnen in polar:

Mit $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $r^2 = x^2 + y^2$ gilt mit $r = 4$

$$1 + xy - 2y^2 =$$

$$u(4,\phi) = 1 + 4\cos(\phi) \cdot 4\sin(\phi) - 2(4\sin(\phi))^2 = 1 + 8(2\sin(\varphi)\cos(\varphi)) + 16(2\sin^2\varphi)$$

Nutze $\sin(2\phi) = 2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi)$, $\quad \cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2(\phi)$

$$2\sin^2(\varphi) = \cos(2\varphi) - 1$$

Also

$$u(4,\varphi) = 1 + 8\sin(2\varphi) + 16\cos(2\varphi) - 16$$

mit

$\circledast$ $$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$

$$u(4,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\cdots} 4^{-k}\left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$

$$= -15 + 16\cos(2\varphi) + 8\sin(2\varphi)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{a_0}{2} = -15 \qquad 4^{-2} a_2 = 16 \qquad 4^{-2} b_2 = 8$$

$$a_2 = 16 \cdot 16 \qquad b = 16 \cdot 8$$

$$a_k = b_k = 0 \qquad \forall k \notin \{0,2\}$$

Damit liefert *

$$u(r,\varphi) = -15 + 16^2 r^{-2} \cos(2\varphi) + 16 \cdot 8\, r^{-2} \sin(2\varphi)$$

Falls Lösung in kartesischen Koordinaten gewünscht sein sollte:

Nutze umgekehrt $\cos(\phi) = \frac{x}{r}$, $\sin(\phi) = \frac{y}{r}$.

Rechne um:

$$u(r,\phi) = -15 + \left(\frac{4}{r}\right)^2 (16\cos(2\phi) + 8\sin(2\phi))$$

$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$

$$= \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{r^2}$$

und

$\sin(2\phi) = 2\cos(\phi) \cdot \sin(\phi) =$

$$= 2\,\frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$u(r,\phi) = -15 + \left(\frac{4}{r}\right)^2 \left(16\cos(2\phi) + 8\sin(2\phi)\right)$$

$$= -15 + \left(\frac{4}{r}\right)^2 \left(16\,\frac{x^2-y^2}{r^2} + 8\,\frac{2xy}{r^2}\right)$$

$$= -15 + \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 16\,\frac{x^2-y^2+2xy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = -15 + \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \left(16\frac{x^2-y^2+xy}{x^2+y^2}\right)$$

Für die Hausaufgabe $\Delta u = 0$ in $x^2+y^2 \leq R^2$

Wähle in der Lösungsdarstellung auf Seite 25

$d_0 = 0 \qquad c_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$