Hörsaalübung zu Blatt 4 Differentialgleichungen II
Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Einführung, Koordinatenwechsel, Typen, Harmonische Funktionen

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Hier nur zwei Variablen. Allgemeiner Fall: Vorlesung.

$$\boxed{\underbrace{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt}}_{\text{Hauptteil}} = h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

Typen:

$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 < 0 \ : \ \text{hyperbolisch,}$$
$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 = 0 \ : \ \text{parabolisch,}$$
$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 > 0 \ : \ \text{elliptisch.}$$

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für vernünftige * Aufgabenstellung erforderlich.

*) Vernünftig heißt sachgemäß/korrekt gestellt/ wohlgestellt: Es gibt eindeutige, stetig von den vorgegebenen Daten abhängige Lösung.

Beispiele: Vgl. HA1

Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen:

a) $\overset{a}{1}\,u_{xx} + \overset{2b}{6}\,u_{xy} + \overset{c}{9}\,u_{yy} + y\,u_x - x\,u_y = 0$

$ac - b^2 = 1 \cdot 9 - 3^2 = 0 \longrightarrow$ Dgl parabolisch

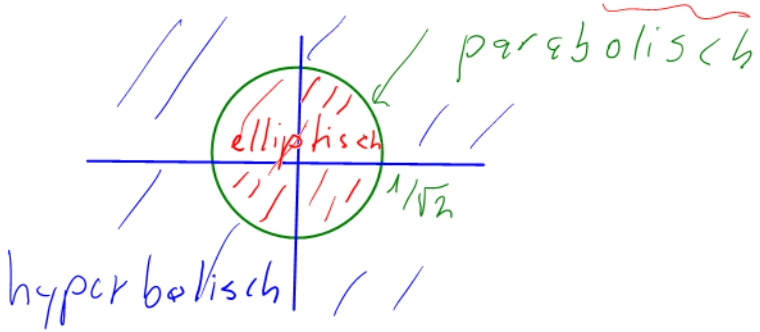
b) $\overset{a}{(2x^2-1)}\,u_{xx} \overset{2b}{- 4xy}\,u_{xy} + \overset{c}{(2y^2-1)}\,u_{yy} + x\,u_x = \cos(x)$

$ac - b^2 = (2x^2-1)(2y^2-1) - (-2xy)^2$

$= \cancel{4x^2y^2} - 2x^2 - 2y^2 + 1 - \cancel{4x^2y^2}$

$= 1 - 2(x^2+y^2)$

$$\begin{cases} = 0 & x^2+y^2 = 1/2 \text{ parab.} \\ < 0 & x^2+y^2 > 1/2 \text{ hyp.} \\ > 0 & x^2+y^2 < \frac{1}{2} \text{ ellipt.} \end{cases}$$



Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(der Ableitungen zweiter Ordnung)

$7x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + \cancel{2a_{12}u_{xt}} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Diagonalform: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung.

Normalform: Keine gemischte Ableitungen zweiter Ordnung und Koeffizienten der zweiten Ableitungen $\in \{-1, 0, 1\}$.

Integrierbare Form: Nur gemischten Ableitungen zweiter Ordnung.

hyperbolisch: Normalform $u_{xx} - u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

oder integrierbare Form $u_{xt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

parabolisch: Normalform $u_{xx} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

elliptisch: " $u_{xx} + u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

Ziel: Herstellung der Diagonalform/Normalform/integrierbare Form durch Einführung neuer Variablen z.B. $\alpha = x + t$ $\mu = x - t$

$\alpha = \alpha(x,t)$, $\mu = \mu(x,t)$, $u(x,t) = x^2 + 2xt + t^2 - 2x + 2t$

$u(x,t) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = (x+t)^2 - 2(x-t)$

$v(\alpha, \mu) = \alpha^2 - 2\mu$

sowie der neuen Funktion: $v(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = u(x,t)$

Regularitätsbedingung: $\alpha_x \mu_t - \alpha_t \mu_x \neq 0.$

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$u_x = (v(\alpha(x,t), \mu(x,t)))_x = v_\alpha \cdot \alpha_x + v_\mu \cdot \mu_x$$

$$= v_\alpha(\alpha(x,t), \mu(x,t)) \cdot \alpha_x + v_\mu(\alpha(x,t), \mu(x,t)) \cdot \mu_x$$

$$u_t = v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t \,,$$

$$u_{xx} = (v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_x + v_{\alpha\mu} \cdot \mu_x) \cdot \alpha_x + v_\alpha \cdot \alpha_{xx} + (v_{\mu\alpha} \cdot \alpha_x + v_{\mu\mu} \cdot \mu_x) \cdot \mu_x + v_\mu \cdot \mu_{xx}$$

$$= v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_x)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_x \mu_x + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_x)^2 + (v_\alpha \alpha_{xx} + v_\mu \mu_{xx}) \,,$$

$$u_{xt} = v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_x \alpha_t + v_{\alpha\mu} \cdot (\mu_t \alpha_x + \mu_x \alpha_t) + v_{\mu\mu} \cdot \mu_t \mu_x + (v_\alpha \alpha_{xt} + v_\mu \mu_{xt}) \,,$$

$$u_{tt} = v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_t)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_t \mu_t + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_t)^2 + (v_\alpha \alpha_{tt} + v_\mu \mu_{tt}) \,.$$

Einsetzen liefert neue DGL

$$Av_{\alpha\alpha} + 2Bv_{\alpha\mu} + Cv_{\mu\mu} = \tilde{h}(\alpha, \mu, v, v_\alpha, v_\mu)$$

Frage: Wie sollte man α, μ wählen?

- Für Normalformen: Siehe Vorlesung. Hier nur eine Kurze Skizze des Verfahrens ohne Beispiel.

- Unten ein Beispiel für die integrierbare Form.

Beispiel zur Präsenzaufgabe 1: Transformation auf integrierbare Form

Bei $u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx} = 0.$
Substituiere $\alpha = x - bt,\ \mu = x - at.$

Beispiel:

$2+7 \qquad 2\cdot 7$

$$1.\ u_{tt} + 9u_{xt} + 14u_{xx} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } u_0(x) = x + \sin(x),$$

$$u_t(x,0) = v_0(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } v_0(x) = -7 - 2\cos(x).$$

$a = 2 \qquad b = 7$

$$\alpha = x - 7t,\ \mu = x - 2t$$

$$u(x,t) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t))$$

Formeln von Seite 5:

$\alpha_x = 1 \qquad \mu_x = 1 \qquad \alpha_{xx} = \alpha_{xt} = \alpha_{tt} = 0 \qquad \mu_{xx} = \mu_{xt} = \mu_{tt} = 0$

$\alpha_t = -7 \qquad \mu_t = -2$

$$u_x = (v(\alpha(x,t),\mu(x,t)))_x = v_\alpha \cdot \overset{1}{\alpha_x} + v_\mu \cdot \overset{1}{\mu_x} = \underline{v_\alpha + v_\mu}$$

$$u_t = v_\alpha \cdot \overset{-7}{\alpha_t} + v_\mu \cdot \overset{-2}{\mu_t} = -7 v_\alpha - 2 \mu_t$$

$$u_{xx} = v_{\alpha\alpha} \cdot (\overset{1}{\alpha_x})^2 + 2 v_{\alpha\mu} \cdot \overset{1}{\alpha_x} \overset{1}{\mu_x} + v_{\mu\mu} \cdot (\overset{1}{\mu_x})^2 + \cancel{(v_\alpha \overset{0}{\alpha_{xx}} + v_\mu \overset{0}{\mu_{xx}})},$$

$$\underline{v_{\alpha\alpha} + 2 v_{\alpha\mu} + v_{\mu\mu}}$$

5.5

$$u_{xt} = v_{\alpha\alpha} \cdot \overset{1\cdot(-7)}{\alpha_x \alpha_t} + v_{\alpha\mu} \cdot (\overset{-2\cdot 1}{\mu_t \alpha_x} + \overset{1\cdot(-7)}{\mu_x \alpha_t}) + v_{\mu\mu} \cdot \underbrace{\overset{-2\cdot 1}{\mu_t \mu_x}}_{0} + \cancel{(v_\alpha \overset{0}{\alpha_{xt}} + v_\mu \overset{0}{\mu_{xt}})},$$

$$\underline{-7 v_{\alpha\alpha} - 9 v_{\alpha\mu} - 2 v_{\mu\mu}}$$

$$u_{tt} = v_{\alpha\alpha} \cdot (\overset{(-7)^2}{\alpha_t})^2 + 2 v_{\alpha\mu} \cdot \overset{-7\cdot(-2)}{\alpha_t \mu_t} + v_{\mu\mu} \cdot (\overset{(-2)^2}{\mu_t})^2 + \cancel{(v_\alpha \overset{0}{\alpha_{tt}} + v_\mu \overset{0}{\mu_{tt}})}.$$

$$\underline{49 v_{\alpha\alpha} + 28 v_{\alpha\mu} + 4 v_{\mu\mu}}$$

Einsetzen in DGL $14 u_{xx} + 9 u_{xt} + u_{tt} = 0$

$$\underbrace{(14\cdot 1 - 7\cdot 9 + 1\cdot 49)}_{0} v_{\alpha\alpha} + \underbrace{(14\cdot 2 - 9\cdot 9 + 1\cdot 28)}_{-25} v_{\alpha\mu} + \underbrace{(14\cdot 1 - 2\cdot 9 + 1\cdot 4)}_{0} v_{\mu\mu} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -25\, v_{\alpha\mu} = 0$$

$$\boxed{\text{Neue DGL: } v_{\alpha\mu} = 0.}$$

Alternativ: Bei linearen Transformationen und DGL

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Hauptteil: $\left(a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + 2a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + a_{22}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u$

Matrixschreibweise:

$$(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla)u = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}}_{\nabla^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial t\end{pmatrix}}_{\nabla} u$$

ausmultipliziert

$$= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}\,\partial/\partial x + a_{12}\,\partial/\partial t \\ a_{12}\,\partial/\partial x + a_{22}\,\partial/\partial t\end{pmatrix} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t} + a_{22}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}$$

Analog die ersten Ableitungen umschreiben liefert:

$$(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$$

Hier DGL: $\underbrace{14}_{a_{11}}u_{xx} + \underbrace{9}_{2a_{12}}u_{xt} + \underbrace{u_{tt}}_{a_{22}=1} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \underline{(\nabla^T A \nabla) u} = \nabla^T \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla \cdot u = \mathbf{0}$$

Transformation: $\alpha = x - 7t,\ \mu = x - 2t$ vgl. oben

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:S^T} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} =: \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Oben berechnet:

$$u_x = 1 \cdot v_\alpha + 1 \cdot v_\mu\,,$$
$$u_t = -7 \cdot v_\alpha - 2 \cdot v_\mu$$

$$\nabla_{xt} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \underbrace{\begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix}}_{\nabla_{\alpha\mu} v} = \boldsymbol{S} \nabla_{\alpha\mu} \cdot v$$

Also $\quad \nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}) = (S\, \nabla_{\alpha\mu})^T = S^T \nabla_{\alpha\mu}^T$$

$$\underline{(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt})} \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu})^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} \boldsymbol{v} = \nabla_{\alpha\mu}^T \underbrace{(\boldsymbol{S}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S})}_{\hat{A}} \nabla_{\alpha\mu} \boldsymbol{v} = 0$$

neue Matrix

Für unser Beispiel gilt:

nur ausmultipliziert

$$\hat{A} = \underline{\underline{\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Unsere neue DGL:

$$\nabla_{\alpha\mu}^T \underbrace{\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}}\nabla_{\alpha\mu}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} \end{pmatrix} v = -25\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \quad \frac{\partial}{\mu}\right) \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \cdot \partial/\partial\mu \\ -\frac{25}{2} \cdot \partial/\partial\alpha \end{pmatrix} v = \left(-\frac{25}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{25}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) v$$

$$= -25\, v_{\alpha\cdot\mu} \overset{!}{=} 0$$

Dgl: $\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0 \implies (v_\alpha)_\mu = 0$

$v(\alpha,\mu)$ hängt nicht von μ ab

$\boldsymbol{v}_\alpha = \varphi(\alpha) \implies v = \int v_\alpha \, d\alpha = \int \varphi(\alpha)\, d\alpha$

$$\boldsymbol{v}(\alpha,\mu) = \Phi(\alpha) + \underbrace{\Psi(\mu)}_{\text{konstant in } \alpha} \implies u(x,t) = \phi(\alpha(x,t)) + \psi(\mu(x,t))$$

Bestimme Φ und Ψ mit Hilfe der Anfangsbedingungen:

$u(x,t) = \phi(x-7t) + \psi(x-2t)$ Allg. Lösung

$u(x,0) = u_0(x) = x + \sin(x)$

$u_t(x,0) = v_0(x) = -7 - 2\cos(x)$

$u_t(x,t) = \phi'(x-7t)(-7) + \psi'(x-2t)(-2)$

$u_t(x,0) = -7\phi'(x) - 2\psi'(x)$

$-5\phi'(x) = -5 \implies \phi' = 1 \quad \phi(x) = x + C$

$\psi(x) \overset{①}{=} x + \sin(x) - (x + c)$

$= \sin(x) - c$

$u(x,t) = \phi(x-7t) + \psi(x-2t)$

$= x - 7t + c + \sin(x-2t) - c$

In unserem Beipiel mit

$$\boxed{u(x,t) = \Phi(x-7t) + \Psi(x-2t)}$$

und

$$u_0(x) = x + \sin(x),\ v_0(x) = -7 - 2\cos(x)$$

Ergeben sich die Bedingungen:

$$u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) = x + \sin(x) \implies \psi(x) = x + \sin(x) - \phi(x) \quad ①$$

und

$$u_t(x,0) = v(x,0) = v_0(x) = -7\phi'(x) - 2\psi'(x) = -7\phi'(x) - 2\underbrace{(x + \sin(x) - \phi(x))'}_{1+\cos(x)-\phi'} =$$

$$= -7\phi'(x) - 2 - 2\cos(x) + 2\phi'(x) = -7 - 2\cos(x)$$

$$\implies -5\phi'(x) = -5 \implies \phi'(x) = 1 \implies \boxed{\phi(x) = x + C}$$

$$① : \quad \psi(x) = x + \sin(x) - x - C = \boxed{\sin(x) - C = \psi(x)}$$

$$u(x,t) = \phi(x-7t) + \psi(x-2t) = x - 7t + \cancel{C} + \sin(x-2t) - \cancel{C}$$

Transformation auf Normalform: Siehe Vorlesung. Hier nur eine grobe Skizze!

Für lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise: $(\nabla^T A \nabla)u + (b^T \nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

A ist reell und symmetrisch:

Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}$.

Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]})$. Neue Koordinaten: $\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Der Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

$$\underbrace{\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau}}_{\text{Hauptteil}} + p_1 v_\eta + p_2 v_\tau + dv = H$$

Hyperbolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, Elliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, Parabolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\hat{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\hat{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$ auf die **Normalformen**

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \pm \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} + p_1\hat{u}_{\hat{x}} + p_2\hat{u}_{\hat{t}} + d\hat{u} = H$$

Im parabolischen Fall ist ein Eigenwert, z.B. λ_2, gleich Null. Eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$ fehlt. Man teilt die Diagonalform durch λ_1.

Beispiele für Diagonalformen:

Hyperbolisch: Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

Elliptisch: Potential-/Laplace Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$,

Parabolisch: Wärmeleitungsgleichung $u_t - cu_{xx} = 0$.

Laplace Gleichung, harmonische Funktionen

Für den Rest der HÜ: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$.

$\partial\Omega \to \Omega$

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=i}^{n} u_{x_i x_i}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega}$$

Im $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\, (x, y) \in \Omega}$$

Im $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad \forall\, (x, y, z) \in \Omega}$$

Beispiel 1: (vgl. PA2a)

Für welche $k \in \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u in ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

a) $u(x, y) := (x + k \cdot y)^2$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$u_x = 2\,(x + k \cdot y), \cdot 1$ $\qquad u_y = 2(x + k \cdot y) \cdot k$

$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = 2k^2, \qquad \Delta u = 2 + 2k^2 \overset{!}{=} 0$

$u_{xx} + u_{yy}$

$\Rightarrow k^2 = -1$ ↯

u ist für kein $k \in \mathbb{R}$ harmonisch

b) $u(x,y) := e^{-3x} \cdot g(y)$

$$u_x = -3e^{-3x} \cdot g(y), \qquad u_y = e^{-3x} \cdot g'(y)$$

$$u_{xx} = 9\,e^{-3x} \cdot g(y), \qquad u_{yy} = e^{-3x} \cdot g''(y)$$

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \\
&= 9\,e^{-3x} \cdot g(y) + e^{-3x} \cdot g''(y) \\
&= e^{-3x}\,\underbrace{(g''(y) + 9g(y))}_{\text{gewöhnliche Dgl für } g} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$g''(y) + 9\,g(y) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 3i$$

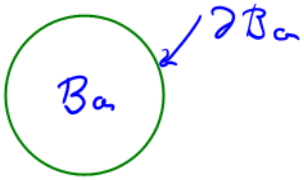
$$\hat{c}_1\, e^{-3iy} + \hat{c}_2\, e^{+3iy} = g(y)$$

reelle Darstellung $\quad g(y) = c_1 \cos(3y) + c_2 \sin(3y)$

$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist $\quad u(x,y) = e^{-3x}\left[c_1 \cos(3y) + c_2 \sin(3y)\right]$ eine Lösung von

$$\Delta u = 0$$

Eigenschaften harmonischer Funktionen



Mittelwerteigenschaft:

Sei u harmonisch in der Kreisscheibe $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf den Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0,y_0)} u(x, y) ds}$$

Mittelpunkt

Länge Rand

Rand

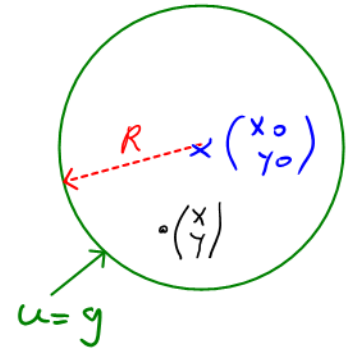
Maximumprinzip:

Eine in Ω harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Aus dem Maximumprinzip folgt für die zugehörigen Randwertaufgaben die

Eindeutigkeit der Lösung von: $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Poissonsche Integralformel: Für die Lösung von



$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Mittelpunkt

u

$$u(x, y) = \frac{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{2\pi R} \int_{\underbrace{\|z - \binom{x_0}{y_0}\| = R}_{\text{Kreisrand}}} \frac{g(z)}{\|z - \binom{x}{y}\|^2} dz$$

Exkurs: $\Delta u = 0$ $\quad u = \hat{v}(r,\varphi) = v(r)$

u rotationssymmetrisch

$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0 \xrightarrow[\text{Wechsel}]{\text{Koordinaten}} v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$

$r = \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$w := v' \longrightarrow w' = v''$

zu lösen $w' + \frac{n-1}{r} w = 0$

$\int \frac{dw}{w} = -\int \frac{n-1}{r}\, dr$

$\ln(w) = -\ln(r)\,(n-1)$

$\xrightarrow{\exp} w = \frac{c}{r^{n-1}} = v'$

$\longrightarrow v = \begin{cases} c \ln(r) + k & n = 2 \\ c \frac{r^{-n+2}}{(n-2)} + k & n > 2 \end{cases}$

Fundamentallösungen: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$n = 2: \qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\boldsymbol{x}\|_2)$

$n > 2: \qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha_n (n-2) n} (\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-n}),$

wobei $\alpha_n =$ Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

$n = 2:$

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$n = 3: \quad \alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\alpha_3 (3-2) \cdot 3} (\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-3}) = \frac{1}{4\pi} |(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})|^{-1}.$$

$\frac{4\pi}{3}(3-2) \cdot 3 \left(\|x\|^{2-3} \right) =$

Nach Vorlesung Seite 61-63 lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

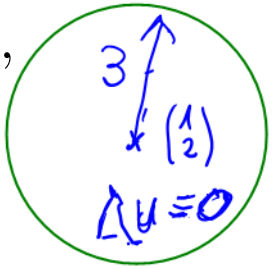
$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

darstellen.

Beispiel 2: (vgl. P2b, H2)

Gesucht ist der Wert $u(1,2)^T$ der C^2 Funktion mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 9,$$



mit

A) $u(x,y) = 2025 \qquad$ für $\quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Variante 1) Die Lösung ist eindeutig.

$u(x,y) = 2025$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe,

Also $u(1,2) =$ 2025

Variante 2) $u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω.

Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ „Omega mit Rand" werden auf dem Rand angenommen.

$\Omega \cup \partial\Omega$

Also $u(1,2) =$ 2025

$\max_{\bar{\Omega}} u = 2025$

$\min_{\bar{\Omega}} u = 2025$

$u = 2025 \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}$

B) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2025$ für $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Hinweis: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$

Kreis mit Radius $R=3$ um Null

Variante 1): $\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

K sei die Kreisscheibe mit Radius $r = 3$ um $(1,2)^T$ (Vorlesung $B_3(1,2)$)

Mittelpunkt in $\binom{1}{2}$: $c(t) = \hat{c}(t) + \binom{1}{2}$

und $\mathbf{c}(t) = (1 + 3\cos(t), 2 + 3\sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$ (Vorlesung $\partial B_3(1,2)$)

eine Parametrisierung von ∂K.

Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$u(1,2) = \frac{1}{2\pi r} \underbrace{\int_{\partial K} u(x,y)\, d(x,y)}_{\text{Kurvenintegral}} = \frac{1}{2\pi \cdot r} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt$$

$\xrightarrow{\text{Ana III}}$

$\|\dot{c}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} \right\|$

$= \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)} = \sqrt{9} = 3$

$$u(1,2) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial K} u(x,y)\,d(x,y) = \frac{1}{2\pi\cdot 3}\int_{\partial K}(x^2-y^2+2025)\,d(x,y)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t))\cdot\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}\left((1+3\cos(t))^2-(2+3\sin(t))^2+2025\right)\cdot 3\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+6\cos(t)+9\cos^2(t)-4-12\sin(t)-9\sin^2(t)+2025\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+9(\cos^2(t)-\sin^2(t))-4+2025\right)dt + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[6\sin(t)+12\cos(t)\right]_0^{2\pi}}_{0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(9\cos(2t)-3+2025)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\frac{9}{2}\sin(2t)}_{\frac{9}{2}(\sin(4\pi)-\sin(0))=0}+2022\cdot t\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2022$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2022\cdot(2\pi-0)\right] = 2022$$

Variante 2): Poissonsche Integralformel

$$u(x,y) = \frac{R^2 - \overset{x_0}{(x-1)}^2 - \overset{y_0}{(y-2)}^2}{2\pi R} \int_{\|z-\overset{\binom{x_0}{y_0}}{\binom{1}{2}}\|=\underset{3}{R}} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$u(1,2) = \frac{3^2 - \overset{(1-1)}{0}^2 - \overset{(2-2)}{0}^2}{2\pi 3} \underbrace{\int_{\|z-\binom{1}{2}\|=3}}_{\text{wie oben}} \frac{\overbrace{z_1^2 - z_2^2 + 2025}^{g(z)}}{\|\boldsymbol{z} - \binom{1}{2}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

Kurvenintegral über Kreis mit Radius 3 um $\binom{1}{2}$

$$= \frac{\cancel{9}}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{((1+3\cos(t))^2 - (2+3\sin(t))^2 + 2025)}{3^{\cancel{2}}} \cdot \underbrace{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}_{3}\, dt$$

exakt wie oben

$$= \frac{3}{6\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(1 + 6\cos(t) + 9\cos^2(t) - 4 - 12\sin(t) - 9\sin^2(t) + 2025)}_{\text{wie oben}}\, dt$$

$$= 2022\,.$$

Im Mittelpunkt der Kreisscheibe ist die Poissonsche Integralformel identisch mit der Mittelwerteigenschaft

Variante 3)

Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, haben wir wegen

$$(x^2 - y^2 + 2025)_{xx} + (x^2 - y^2 + 2025)_{yy} = 2 - 2 = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

die Lösung bereits vorliegen und es gilt: $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2025$ in der ganzen Kreisscheibe

$$u(1,2) = 1^2 - 2^2 + 2025 = 2022\,.$$

Rotationssymmetrische Lösungen

Nach Vorlesung lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

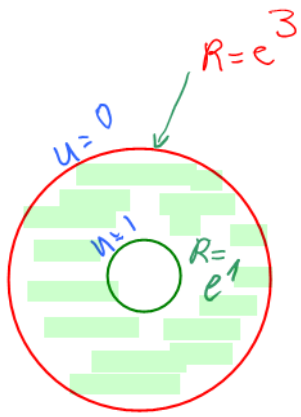
darstellen.

Nutze dies falls Daten und Gebiet Ω mit $0 \notin \Omega$ rotationssymmetrisch sind!

Beispiel 3: (vgl. PA3)

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= 0 \quad \text{für } e^2 < x^2 + y^2 < e^6, \\ v(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = e^2, = (e^1)^2 \\ v(x,y) &= 0 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = e^6 = (e^3)^2 \end{aligned}$$



Ansatz: $\quad v(x,y) = u(r,\phi) = w(r), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

Mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{r}})$$

erhalten wir für die PDE die Lösungen

$$v(x,y) = a\Phi(x,y) + b.$$

Also

$$\boxed{u(r,\phi) = w(r) = -\frac{a}{2\pi}\ln(r) + b.}$$

Die Randwerte liefern

$$u(e^1,\phi) = 1 \implies -\frac{a}{2\pi}\underbrace{\ln(e^1)}_{1} + b = 1$$

$$\implies -\frac{a}{2\pi} + b = 1 \implies \boxed{b = 1 + \frac{a}{2\pi}.}$$

$$u(e^3,\phi) = 0 \implies -\frac{a}{2\pi}\underbrace{\ln(e^3)}_{3} + \boxed{1 + \frac{a}{2\pi}} = 0 \implies \frac{-3a}{2\pi} + \frac{a}{2\pi} = -1$$

$$\implies -2a = -2\pi$$

$$\implies a = \pi, \qquad b = 1 + \frac{\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

$$u(r,\phi) = -\frac{\pi}{2\pi}\ln(r) + \frac{3}{2}. \quad = -\frac{1}{2}\ln(\overbrace{r}^{\sqrt{x^2+y^2}}) + \frac{3}{2}$$

$$v(x,y) = \frac{3 - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2}.$$