Hörsaalübung zu Blatt 4 Differentialgleichungen II
Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Einführung, Koordinatenwechsel, Typen, Harmonische Funktionen

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Hier nur zwei Variablen. Allgemeiner Fall: Vorlesung.

$$\boxed{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt} \;=\; h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

Typen:

$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 < 0$: hyperbolisch,
$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 = 0$: parabolisch,
$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 > 0$: elliptisch.

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für vernünftige * Aufgabenstellung erforderlich.

*) Vernünftig heißt sachgemäß/korrekt gestellt/ wohlgestellt: Es gibt eindeutige, stetig von den vorgegebenen Daten abhängige Lösung.

Beispiele: Vgl. HA1
Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen:

a) $u_{xx} + 6\,u_{xy} + 9\,u_{yy} + \; y\,u_x - x\,u_y \;=\; 0$

b) $(2x^2 - 1)\,u_{xx} - 4xy\,u_{xy} + (2y^2 - 1)\,u_{yy} + x\,u_x \;=\; \cos(x)$

Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(der Ableitungen zweiter Ordnung)

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Diagonalform: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung.

Normalform: Keine gemischte Ableitungen zweiter Ordnung und Koeffizienten der zweiten Ableitungen $\in \{-1, 0, 1\}$.

Integrierbare Form: Nur gemischten Ableitungen zweiter Ordnung.

hyperbolisch: $$u_{xx} - u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$$

oder $$u_{xt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$$

parabolisch: $$u_{xx} = G(x, t, u, u_x, u_t)$$

elliptisch: $$u_{xx} + u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$$

Ziel: Herstellung der Diagonalform/Normalform/integrierbare Form durch Einführung neuer Variablen
$\alpha = \alpha(x,t),\ \mu = \mu(x,t),$

sowie der neuen Funktion: $\qquad v(\alpha(x,t),\mu(x,t)) = u(x,t)$

Regularitätsbedingung: $\alpha_x\mu_t - \alpha_t\mu_x \neq 0.$

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$u_x = \left(v(\alpha(x,t),\mu(x,t))\right)_x =$$

$$u_t = v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t\,,$$

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \\
&= v_{\alpha\alpha}\cdot(\alpha_x)^2 + 2v_{\alpha\mu}\cdot\alpha_x\mu_x + v_{\mu\mu}\cdot(\mu_x)^2 + \left(v_\alpha\alpha_{xx} + v_\mu\mu_{xx}\right),\\
u_{xt} &= v_{\alpha\alpha}\cdot\alpha_x\alpha_t + v_{\alpha\mu}\cdot(\mu_t\alpha_x + \mu_x\alpha_t) + v_{\mu\mu}\cdot\mu_t\mu_x + \left(v_\alpha\alpha_{xt} + v_\mu\mu_{xt}\right),\\
u_{tt} &= v_{\alpha\alpha}\cdot(\alpha_t)^2 + 2v_{\alpha\mu}\cdot\alpha_t\mu_t + v_{\mu\mu}\cdot(\mu_t)^2 + \left(v_\alpha\alpha_{tt} + v_\mu\mu_{tt}\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert neue DGL

$$Av_{\alpha\alpha} + 2Bv_{\alpha\mu} + Cv_{\mu\mu} = \tilde{h}(\alpha, \mu, v, v_\alpha, v_\mu)$$

Frage: Wie sollte man α, μ wählen?

- Für Normalformen: Siehe Vorlesung. Hier nur eine Kurze Skizze des Verfahrens ohne Beispiel.

- Unten ein Beispiel für die integrierbare Form.

Beispiel zur Präsenzaufgabe 1: Transformation auf integrierbare Form

Bei $\quad u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx} = 0.$
Substituiere $\alpha = x - bt$, $\mu = x - at$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + 9u_{xt} + 14u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) = u_0(x), &\quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } u_0(x) = x + \sin(x), \\
u_t(x,0) = v_0(x), &\quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } v_0(x) = -7 - 2\cos(x).
\end{aligned}
$$

$$\alpha = x - 7t,\ \mu = x - 2t$$

$$u(x,t) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t))$$

Formeln von Seite 5:

$$u_x = \left(v(\alpha(x,t),\mu(x,t))\right)_x =$$

$$
\begin{aligned}
u_t &= v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t \\
u_{xx} &= v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_x)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_x \mu_x + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_x)^2 + (v_\alpha \alpha_{xx} + v_\mu \mu_{xx}), \\
u_{xt} &= v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_x \alpha_t + v_{\alpha\mu} \cdot (\mu_t \alpha_x + \mu_x \alpha_t) + v_{\mu\mu} \cdot \mu_t \mu_x + (v_\alpha \alpha_{xt} + v_\mu \mu_{xt}), \\
u_{tt} &= v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_t)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_t \mu_t + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_t)^2 + (v_\alpha \alpha_{tt} + v_\mu \mu_{tt}).
\end{aligned}
$$

Einsetzen in DGL $14u_{xx} + 9u_{xt} + u_{tt} = 0$

Neue DGL: $v_{\alpha\mu} = 0$.

Alternativ: Bei linearen Transformationen und DGL

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} \; + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = \; h(x,t)}$$

Hauptteil: $\quad \left(a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + 2a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + a_{22}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\right) u$

Matrixschreibweise:

$(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla) u$

Analog die ersten Ableitungen umschreiben liefert:

$$(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla) u + (b^T \nabla) u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Hier DGL: $14u_{xx} + 9u_{xt} + u_{tt} = \; 0$

$$\Longleftrightarrow (\nabla^T A \nabla) u \;=\; \nabla^T \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla \cdot u = \mathbf{0}$$

Transformation: $\alpha \;=\; x - 7t, \; \mu \;=\; x - 2t$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} =: \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Oben berechnet:
$$u_x = \; 1 \cdot v_\alpha + 1 \cdot v_\mu \,,$$
$$u_t = -7 \cdot v_\alpha - 2 \cdot v_\mu$$

$$\nabla_{xt} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix} = \; \boldsymbol{S} \nabla_{\alpha\mu} \cdot v$$

Also $\quad \nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt}) u = \; (\, \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} \,)^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} \, v = \; \nabla_{\alpha\mu}^T \, (\boldsymbol{S}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S}) \, \nabla_{\alpha\mu} \, v \; = \; 0$$

Für unser Beispiel gilt:

$$\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Unsere neue DGL:

$$\nabla_{\alpha\mu}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{S} \nabla_{\alpha\mu} \boldsymbol{v} = (\tfrac{\partial}{\partial\alpha}, \tfrac{\partial}{\partial\mu}) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} \end{pmatrix} = -25 \boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0$$

$$\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0 \implies$$

$$\boldsymbol{v}_{\alpha} = \qquad\qquad \implies$$

$$\boldsymbol{v}(\alpha, \mu) = \ \Phi(\alpha) + \Psi(\mu) \implies u(x,t) =$$

Bestimme Φ und Ψ mit Hilfe der Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u_t(x,0) = v_0(x)$$

In unserem Beipiel mit

$$u(x,t) = \Phi(x-7t) + \Psi(x-2t)$$

und

$$u_0(x) = x + \sin(x),\ v_0(x) = -7 - 2\cos(x)$$

Ergeben sich die Bedingungen:

$$u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) = x + \sin(x)$$

und

$$v(x,0) =$$

Transformation auf Normalform: Siehe Vorlesung. Hier nur eine grobe Skizze!

Für lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise: $(\nabla^T A \nabla)u + (b^T \nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

A ist reell und symmetrisch:

Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}$.

Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]})$. Neue Koordinaten: $\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Der Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

$$\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau} + p_1 v_\eta + p_2 v_\tau + dv = H$$

Hyperbolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, Elliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, Parabolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\hat{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\hat{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$ auf die **Normalformen**

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \pm \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} + p_1 \hat{u}_{\hat{x}} + p_2 \hat{u}_{\hat{t}} + d\hat{u} = H$$

Im parabolischen Fall ist ein Eigenwert, z.B. λ_2, gleich Null. Eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$ fehlt. Man teilt die Diagonalform durch λ_1.

Beispiele für Diagonalformen:

Hyperbolisch: Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

Elliptisch: Potential-/Laplace Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$,

Parabolisch: Wärmeleitungsgleichung $u_t - c u_{xx} = 0$.

Laplace Gleichung, harmonische Funktionen

Für den Rest der HÜ: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$.

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=i}^{n} u_{x_i x_i}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega}$$

Im $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega}$$

Im $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad \forall\,(x,y,z) \in \Omega}$$

Beispiel 1: (vgl. PA2a)

Für welche $k \in \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u in ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

a) $u(x, y) := (x + k \cdot y)^2 \qquad k \in \mathbb{R}$

$u_x = 2\,(x + k \cdot y), \qquad u_y = 2(x + k \cdot y) \cdot k$

$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = 2k^2, \qquad \Delta u = 2 + 2k^2$

b) $u(x,y) := e^{-3x} \cdot g(y)$

$$u_x = -3e^{-3x} \cdot g(y), \qquad u_y = e^{-3x} \cdot g'(y)$$

$$u_{xx} = 9\,e^{-3x} \cdot g(y), \qquad u_{yy} = e^{-3x} \cdot g''(y)$$

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \\ &= 9\,e^{-3x} \cdot g(y) + e^{-3x} \cdot g''(y) \\ &= e^{-3x}\,(g''(y) + 9g(y)) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft:

Sei u harmonisch in der Kreisscheibe $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf den Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0, y_0)} u(x, y) ds}$$

Maximumprinzip:

Eine in Ω harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Aus dem Maximumprinzip folgt für die zugehörigen Randwertaufgaben die

Eindeutigkeit der Lösung von: $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Poissonsche Integralformel: Für die Lösung von

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$u(x, y) = \frac{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{2\pi R} \int_{\|z - \binom{x_0}{y_0}\| = R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2} \, d\boldsymbol{z}$$

Fundamentallösungen: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$n = 2:\qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\|\boldsymbol{x}\|_2)$

$n > 2:\qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha_n(n-2)n}(\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-n}),$

wobei $\alpha_n =$ Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

$n = 2:$

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$n = 3:\ \alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\alpha_3(3-2)\cdot 3}(\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-3}) = \frac{1}{4\pi}|(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})|^{-1}.$$

Nach Vorlesung Seite 61-63 lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

darstellen.

Beispiel 2: (vgl. P2b, H2)

Gesucht ist der Wert $u(1,2)^T$ der C^2 Funktion mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 9,$$

mit

A) $u(x,y) = 2025 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Variante 1) Die Lösung ist eindeutig.

$u(x,y) = 2025$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe,

Also $u(1,2) =$

Variante 2) $u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω.

Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ werden auf dem Rand angenommen.

Also $u(1,2) =$

B) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2025$ für $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Hinweis: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$

Variante 1):

K sei die Kreisscheibe mit Radius $r = 3$ um $(1,2)^T$ (Vorlesung $B_3(1,2)$)

und $\mathbf{c}(t) = (1 + 3\cos(t),\ 2 + 3\sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$ (Vorlesung $\partial B_3(1,2)$)

eine Parametrisierung von ∂K.

Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$u(1,2) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K} u(x,y)\, d(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot r} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt$$

$$
\begin{aligned}
u(1,2) &= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial K} u(x,y)\,d(x,y) = \frac{1}{2\pi\cdot 3}\int_{\partial K}(x^2-y^2+2025)\,d(x,y)\\
&= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t))\cdot\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt\\
&= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}((1+3\cos(t))^2-(2+3\sin(t))^2+2025)\;\cdot\;3\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+6\cos(t)+9\cos^2(t)-4-12\sin(t)-9\sin^2(t)+2025)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(9\cos(2t)-3+2025)\,dt\\
&= 2022
\end{aligned}
$$

Variante 2): Poissonsche Integralformel

$$u(x,y) = \frac{R^2-(x-1)^2-(y-2)^2}{2\pi R} \int_{\|z-\binom{1}{2}\|=R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z}-\binom{x}{y}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$u(1,2) = \frac{3^2-0^2-0^2}{2\pi 3} \int_{\|z-\binom{1}{2}\|=3} \frac{z_1^2-z_2^2+2025}{\|\boldsymbol{z}-\binom{1}{2}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$= \frac{9}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{((1+3\cos(t))^2-(2+3\sin(t))^2+2025)}{3^2} \cdot \ \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\ dt$$

$$= \frac{3}{6\pi} \int_0^{2\pi} (1+6\cos(t)+9\cos^2(t)-4-12\sin(t)-9\sin^2(t)+2025)\, dt$$

$$= 2022\,.$$

Variante 3)

Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, haben wir wegen

$$(x^2 - y^2 + 2025)_{xx} + (x^2 - y^2 + 2025)_{yy} = 2 - 2 = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

die Lösung bereits vorliegen und es gilt:

$$u(1,2) = 1^2 - 2^2 + 2025 = 2022\,.$$

Rotationssymmetrische Lösungen

Nach Vorlesung lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

darstellen.

Nutze dies falls Daten und Gebiet Ω mit $0 \notin \Omega$ rotationssymmetrisch sind!

Beispiel 3: (vgl. PA3)

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= 0 \quad \text{für } e^2 < x^2 + y^2 < e^6, \\ v(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = e^2, \\ v(x,y) &= 0 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = e^6. \end{aligned}$$

Ansatz: $v(x,y) = u(r,\phi) = w(r), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

Mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

erhalten wir für die PDE die Lösungen

$$v(x,y) = a\Phi(x,y) + b.$$

Also

$$u(r,\phi) = w(r) = -\frac{a}{2\pi}\ln(r) + b.$$

Die Randwerte liefern

$$
\begin{aligned}
u(e^1,\phi)=1 &\implies -\frac{a}{2\pi}\ln(e^1)+b=1\\
&\implies -\frac{a}{2\pi}+b=1 \implies b=1+\frac{a}{2\pi}.\\
u(e^3,\phi)=0 &\implies -\frac{a}{2\pi}\ln(e^3)+1+\frac{a}{2\pi}=0 \implies\\
&\implies a=\pi, \qquad b=1+\frac{\pi}{2\pi}
\end{aligned}
$$

$$
u(r,\phi)=-\frac{\pi}{2\pi}\ln(r)+\frac{3}{2}.
$$

$$
v(x,y)=\frac{3-\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2}.
$$