Hörsaalübung zu Blatt 3 Differentialgleichungen II Erhaltungsgleichugen; Stoß- und Verdünnungswellen, Burgers Gleichung

Zur Erinnerung: Im Hausaufgabenblatt 1 hatten wir mit

$u(x,t)\ =$ Dichte im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)\ =$ Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)\ =\ u(x,t)\cdot v(x,t)\ =$ Fluss in (x,t)

$M(t) =$ Masse in einem Bereich Ω (In der ÜbungIntervall)

die Massebilanz

$$M(t) = \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx \;=\; M(t_0) \;+\; \int_{t_0}^{t} \left(q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau)\right) d\tau\,.$$

Bei höherer Dimension $\displaystyle\int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} \;=\; M(t_0) \;-\; \int_{t_0}^{t}\int_{\partial\Omega} q_(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\,d\tau\,.$

Erst nach Umformungen und unter **Voraussetzung der Differenzierbarkeit** wurde daraus:

$$u_t(x,t) \;=\; -\,q_x(x,t)$$

Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension

Cauchy-Problem:

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{auf } \forall x \in \mathbb{R}$$

$f = f(u) =$ Flussfunktion.

Wegen $f(u(x,t))_x = f'(u) \cdot u_x$

wird mit $a(u) := f'(u)$ aus der Dgl.:

$u_t + a(u) \cdot u_x = 0$

Also Form von letzter HÜ. Dort: keine Probleme mit eindeutigen Lösungen. Das muss nicht so sein!

Letzte HÜ: Transportgleichung mit $f(u) = c \cdot u$ linear.

Jetzt: Beispiel für nichtlineares f.

Burgers Gleichung

$$\boxed{u_t + uu_x \;=\; u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \;=\; 0\,, \qquad u(x,0) \;=\; u_0(x)}$$

Also $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ Und $f'(u) = u$. $\quad u_t + u \cdot u_x = 0$

Charakteristiken = Kurven $(x(t), t)$ mit: $x(t)$ löst $\quad \dfrac{dx}{dt} \;=\; u$

Entlang der Kurven $(x(t), t)$ gilt wieder: $\quad \dfrac{du}{dt} \;=\; 0$

Also für jede Lösung der Differentialgleichung

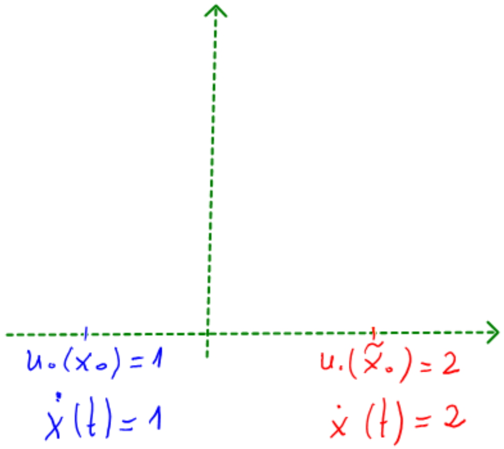
$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) \;=\; u_x \cdot \dot{x} + u_t \;=\; u_x \cdot u + u_t \;\; = \;0$$

$\Longrightarrow$ Lösung u konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = u$ konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow \quad$ Charakteristiken haben konstante Steigung

$\Longrightarrow \quad$ Charakteristiken sind Geraden.



Die Idee war:
Bestimme zu $(x(t), t)$ auf der zugehörigen Charakteristik $x_0 = x(0)$ in der Form

$$x_0 = x_0(x, t)$$

Dann gilt $\quad u(x,t) = u_0\left(x_0(x,t)\right)$

Frage : Geht das immer eindeutig?

Mit den Bezeichnungen aus letzter HÜ für

$$u_t + uu_x = 0\,, \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u(x(t),t) = c_2$$

$$\frac{dx}{dt} = u = c_2 \Longrightarrow x(t) = c_2 t + c_1 = ut + c_1 \qquad x = ut + c_1$$

Also $c_1 = x - ut$ und $c_2 = u$

und wie in der letzten HÜ nur mit ϕ statt f weil f jetzt Flussfunktion

$c_2 = \phi(c_1) \Longleftrightarrow u = \phi(x - ut)$ (allgemeine Lösung)

$t = 0:\; u(x,0) = \phi(x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$ Also $u = u_0(x - ut)$.

(implizite Darstellung der Lösung)

Wie sehen die Charakteristiken aus?

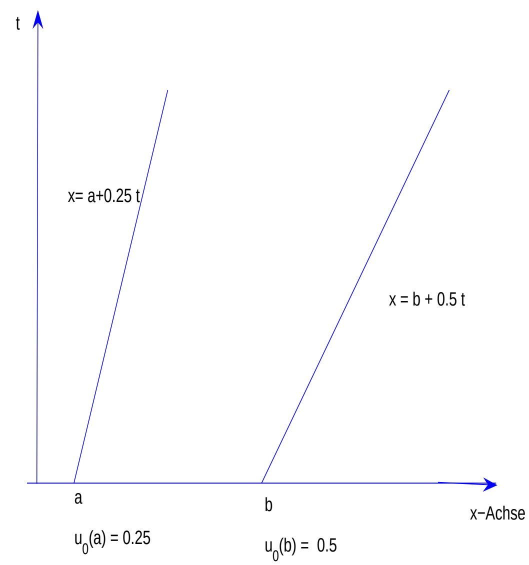
Wegen $\dot{x}(t) = u = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0))$

erhalten wir die Charakteristiken:

$x(t) = x(0) + u_0(x(0)) \cdot t$

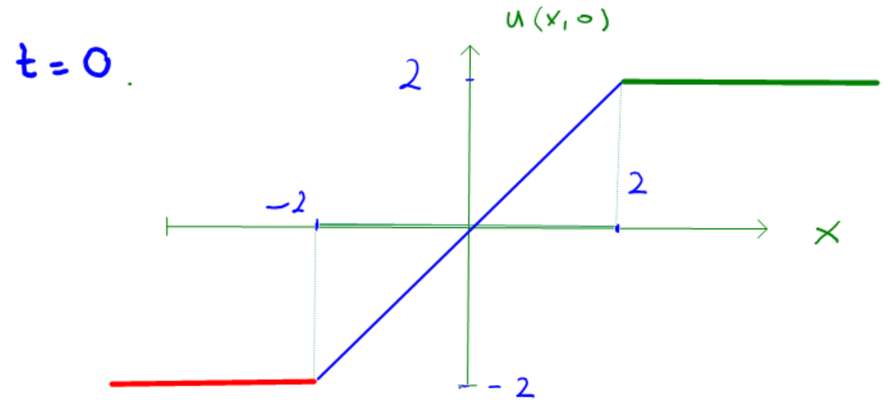
$x(t)$ wächst auf der Charakteristik mit der Rate/dem Faktor: $u_0(x_0)$

Steigung in der $x - t-$Ebene: $\frac{1}{u_0(x_0)}$

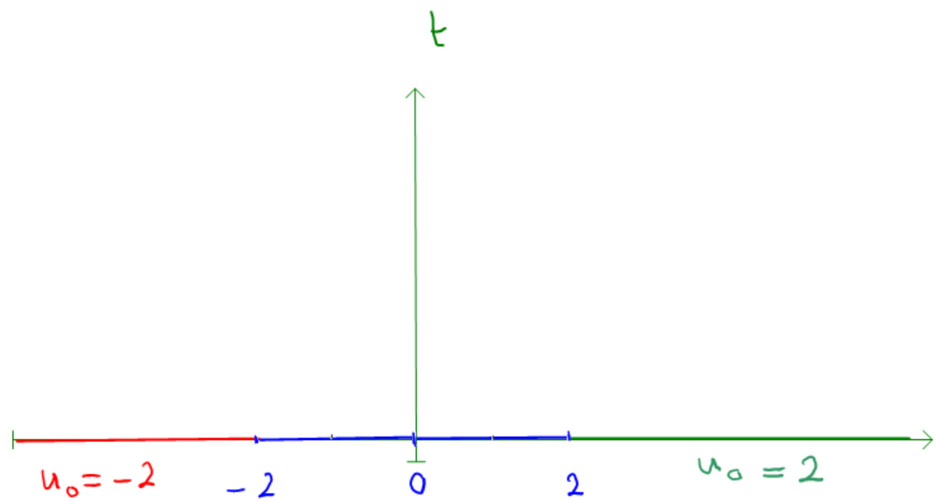


Beispiel: Immer noch für $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$

$$u(x,0) = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ x & -2 \le x \le 2 \\ 2 & x \ge 2 \end{cases}$$



$$u(x,t) = \begin{cases} -2 & x \le \\ & x \le \\ 2 & x \ge \end{cases}$$



Für $-2 < x(0) < 2$ gilt $u(x(0),0) = x(0)$

Oben ausgerechnet:

$x(0) = x - ut$ und $u = u(x(0),0) = x(0)$

Also $u = x - ut \implies u + ut = x \implies u(x,t) = \frac{x}{1+t}$

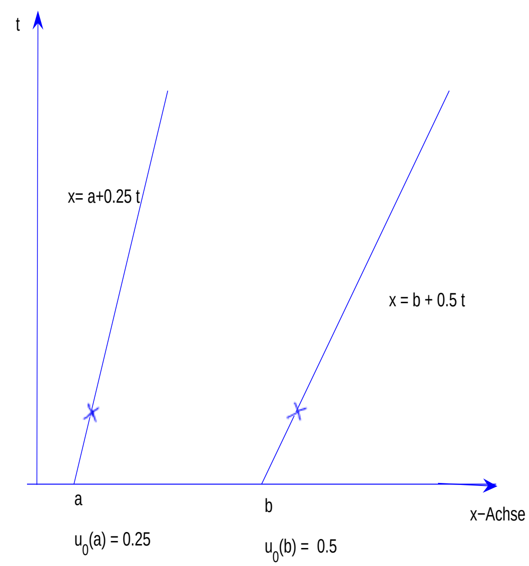
Fall 1) u_0 stetig und monoton steigend: $\quad u_0(a) \leq u_0(b) \quad \forall\, a < b.$

Es sei $(x_a(t), t)$ die Charakteristik durch $(a, 0)$ und $(x_b(t), t)$ die Charakteristik durch $(b, 0)$.

Dann gilt: $\dot{x}_a(t) = u_0(a)$ und $\dot{x}_b(t) = u_0(b)$ und damit

$$\dot{x}_a \ \leq \ \dot{x}_b \qquad \forall\, a \leq b$$

x wächst auf der Charakteristik durch (b,0) mindestens so schnell wie auf der Charakteristik durch (a,0). Qualitativ erhält man folgendes Bild

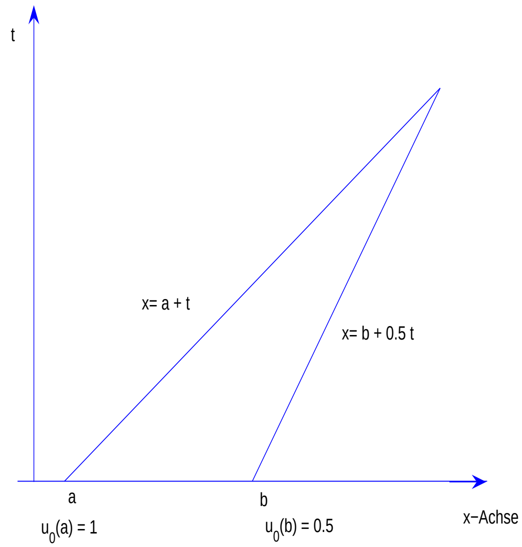


Die Charakteristik durch (a,0) kann die Charakteristik durch (b,0) nicht einholen. Es gibt keine Schnittpunkte von Charakteristiken! Lösung ist eindeutig. Die Steigungen ändern sich stetig.

Fall 2) u_0 stetig und $u_0(a) > u_0(b)$ für irgendein $a < b$. Dann gilt

$$\dot{x}_a > \dot{x}_b$$

Die Charakteristik durch (a,0) holt die Charakteristik durch (b,0) irgendwann ein! Es kommt zu Mehrdeutigkeiten!!

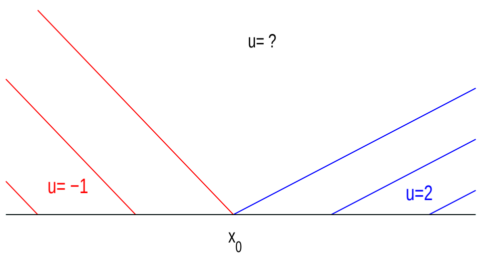


Die Mehrdeutigkeit tritt spätestens dann auf, wenn für ein x_0 und ein $\delta \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$x_0 + u_0(x_0) \cdot t = (x_0 + \delta) + u_0(x_0 + \delta) \cdot t \, .$$

Fall 3) u_0 monoton steigend aber nicht stetig.
Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und damit Gebiete in denen keine Charakteristiken verlaufen.

Beispiel: Burgers Gleichung mit $$u(x,0) = \begin{cases} -1 & x < x_0 \\ 2 & x \geq x_0 \end{cases}$$



Für $t > 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \leq x_0 - t, \\ ? & x_0 - t < x < x_0 + 2t \\ 2 & x \geq x_0 + 2t\ . \end{cases}$$

Vorlesung: Der charakteristikenfreie Bereich wird durch eine sogenannte

Verdünungswelle $$u(x,t) = \frac{x - x_0}{t}$$

aufgefüllt. Die Lösung ist stetig aber nicht differenzierbar!

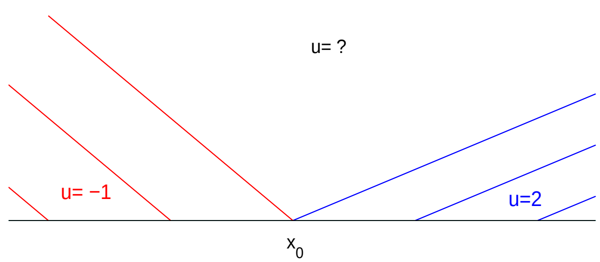
Allgemeiner: Für die Burgers Gleichung mit beliebigen $u_l < u_r$ und

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{ist durch } u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 + u_l \cdot t, \\ \dfrac{x - x_0}{t} & x_0 + u_l \cdot t < x < x_0 + u_r \cdot t, \qquad t > 0 \\ u_r & x \ge x_0 + u_r \cdot t\,. \end{cases}$$

in jedem einzelnen $(x,t)-$ Bereich eine Lösung der Differentialgleichunggegeben.

In unserem Beispiel



Auf der letzten roten Linie:

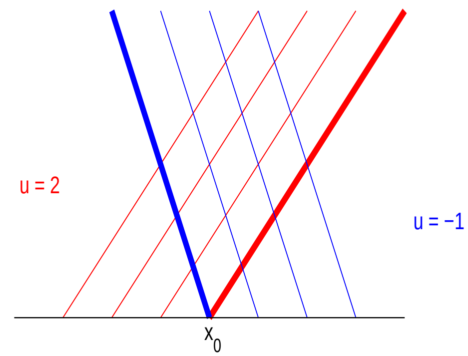
$$u(x(t),t) \;=\; \frac{x - x_0}{t} = -1$$

Auf der ersten blauen Linie:

$$u(x(t),t) \;=\; \frac{x - x_0}{t} = 2$$

Fall 4) u_0 springt nach unten.
Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und die Charakteristiken schneiden sich.
Beispiel: Burgers Gleichung mit

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \ 2 & x < x_0 \\ u_r = \ -1 & x \geq x_0 \end{cases}$$



Lösung:

$u(x,t) =$

Vorlesung: Die Unstetigkeit bewegt sich entlang einer sogenannten **Stoßwelle** $s(t)$ (Schock)

Fragen:

1) was heißt hier Lösung? u ist nicht einmal stetig.
2) Kann ich $s(t)$ beliebig wählen?

Zu 1) Schwache Lösungen:

Klassische Lösung erfüllt: $u_t + (f(u))_x = 0$

$$u_t \qquad + \qquad (f(u))_x \qquad = 0$$

Partielle Integration

Schwache Lösung erfüllt für alle Testfunktionen $v(x,t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$,
v differenzierbar, mit kompaktem Träger:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + v_x f(u))dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v_0(x)dx = 0$$

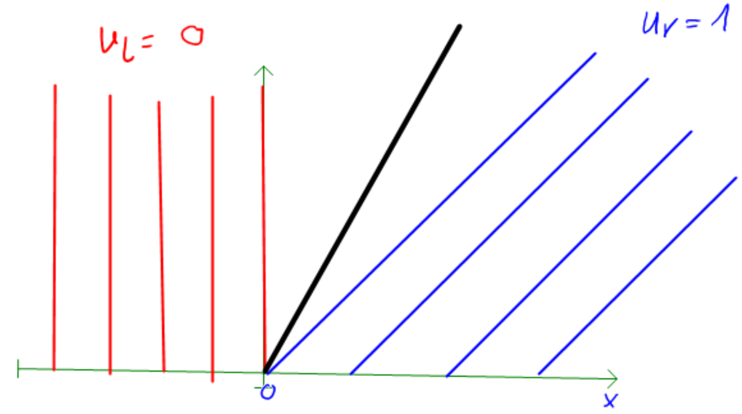
Zu 2) Sprungbedingung:

Bei einer Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ muss die **Rankine**- **Hugoniot**- **Sprungbedingung** gelten

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

für Burgers also $\dot{s}(t) = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_r}{2}$

Sei f **streng konvex**, wie bei Burgers Gleichung.



Warum bei $u_l < u_r$ nicht auch eine Stoßwelle?

Physik / Betrachtung Grenzfall von Lösungen von

$u_t + (f(u))_x = \epsilon u_{xx}$ für $\epsilon \to 0$ liefert:

Die physikalisch sinnvolle, eindeutige schwache Lösung, die **Entropielösung** erfüllt die **Entropiebedingung**:

$\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, t, z \in \mathbb{R}^+ \colon u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{C}{t} z.$

Damit kann ein Sprung in u nur nach unten erfolgen und jede Stoßfront $s(t)$ einer Entropielösung erfüllt:

$$\boxed{f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)}$$

Für Burgers also:

Zusammenfassung:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \; (f \text{ streng konvex}), \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$$

- $u_l > u_r$: Stoßfront $s(t)$ mit $\dot{s}(t) = \dfrac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$

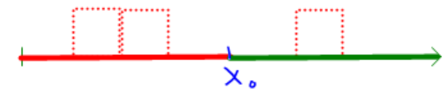
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$ $\quad v = f(u) \longrightarrow g(v) = u$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + f'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$

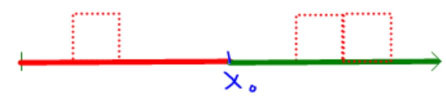
Zu unseren Beispielen: $u_t + u \cdot u_x = 0$ also $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $f'(u) = u =$ Identität

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \ 2 & x < x_0 \\ u_r = \ -1 & x \geq x_0 \end{cases} \implies \dot{s}(t) =$$

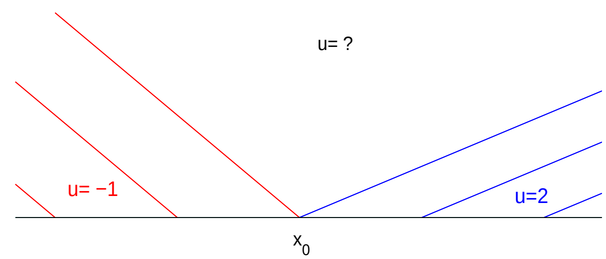


$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = \ 2 & x < \\ \\ u_r = \ -1 & x > \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \ -1 & x < x_0 \\ u_r = \ 2 & x \geq x_0 \end{cases} \implies$$



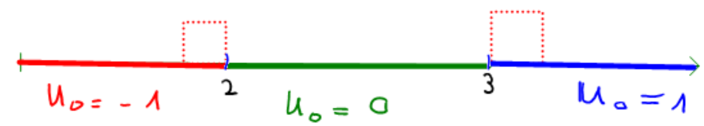
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = \ -1 & x < \\ & \quad \leq x \leq \\ u_r = \ 2 & x > \end{cases}$$



Weitere Beispiele:

A: Mehrere Verdünnungswellen

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & x \leq -2\,, \\ 0 & -2 < x \leq 3\,, \\ 1 & x > 3\,. \end{cases}$$

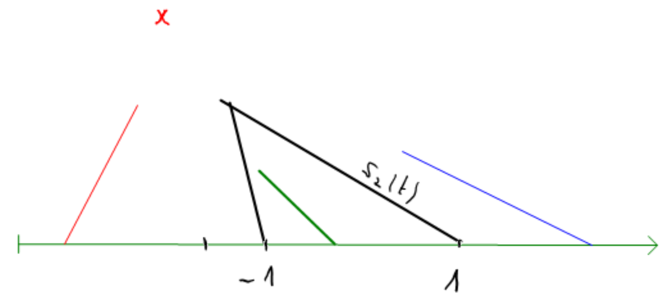


$\Longrightarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \leq \\ & < x \leq \\ 0 & < x \leq \\ & < x \leq \\ 1 & x > \end{cases}$$

B: Mehrere Stoßwellen

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq -1\,, \\ -1 & -1 < x \leq 1\,, \\ -2 & x > 1\,. \end{cases}$$



Zunächst erhält man

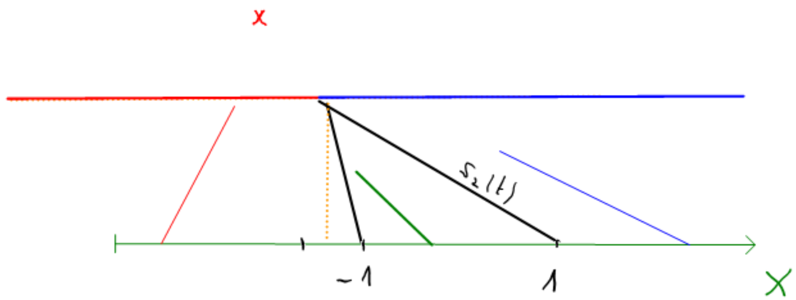
$s_1(t) =$

$s_2(t)$

$\Longrightarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \\ -1 & \quad < x \leq \\ -2 & x > \end{cases}$$

Aber nur so lange bis sich die Stoßfronten treffen:



$$s_1(t^*) \overset{!}{=} s_2(t^*) \implies$$

Neue Stoßfront mit $u_l =$ und $u_r =$

$$s_3(t) = s_3(t^*) + \dot{s}_3(t)(t - t^*)$$

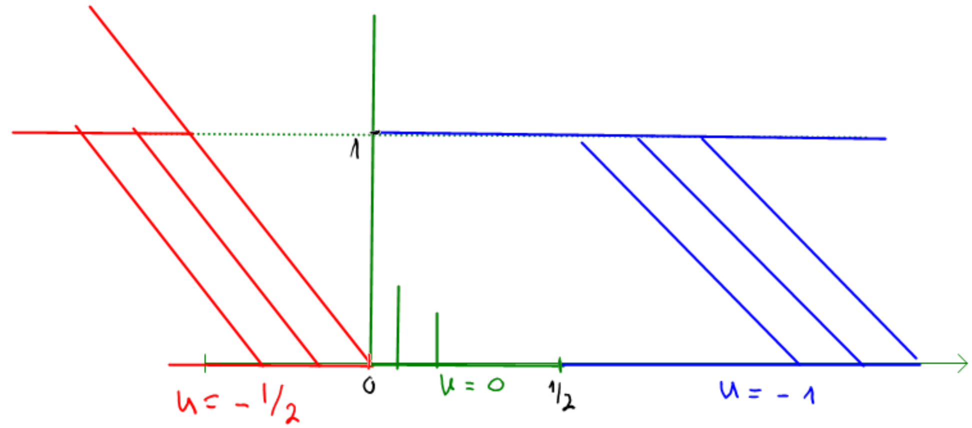
$$\dot{s}_3 = \tfrac{u_l + u_r}{2}$$

Für $t > t^* =$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \le s_3(t) \\ -2 & x > s_3(t) \end{cases}$$

C: Stoßwelle trifft Verdünnungswelle

$$u(x,0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le 0\,, \\ 0 & 0 < x \le \frac{1}{2}\,, \\ -1 & x > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

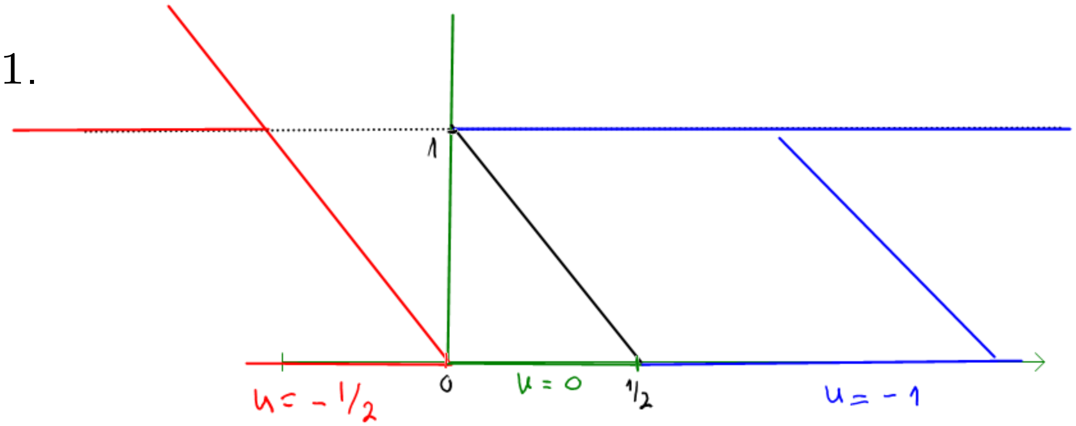


Zunächst erhält man wie gahabt
eine Verdünungswelle und eine Stoßwelle:

(Schwache) Lösung zunächst (also für hinreichend kleine t):

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le \\ \frac{x-0}{t} & < x \le \\ 0 & < x \le \\ -1 & x > \end{cases}$$

Ab hier Zum Kür Teil Hausaufgabe 2 zum Selbststudium.



Lösung oben Kann nur gelten bis $t = 1$.

Dann: Neue Unstetigkeit $s(t)$ mit

$u_l = \frac{x_l}{t}$, $u_r = -1$

$u_l = \frac{s(t)}{t}$, $u_r = -1 \implies$

$$\dot{s}(t) = \frac{\frac{s(t)}{t} - 1}{2}$$

$\dot{s}(t) = \frac{1}{2t} \cdot s(t) - \frac{1}{2}$ (inhom. lin. ODE) $\dot{s}_h(t) = \frac{1}{2t} \cdot s_h(t)$

$s_h(t) = ct^{1/2},$

$s_p(t) = c(t)t^{1/2} \Longrightarrow \dot{c}(t)t^{1/2} \overset{!}{=} -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \dot{c}(t) = -\frac{1}{2}t^{-1/2}$

$c(t) = -t^{1/2} + d$

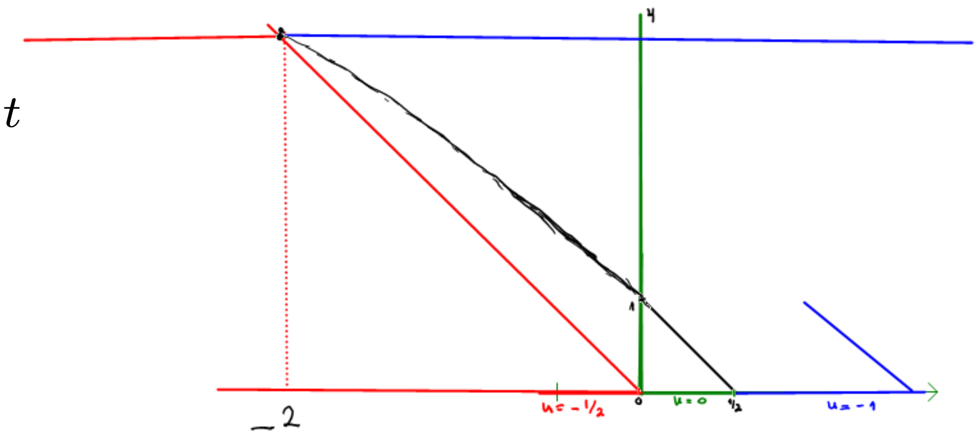
also z.B. $s_p(t) = -t^{1/2} \cdot t^{1/2} = -t$

$s(t) = c\sqrt{t} - t$

Und nun? Anfangswert? Wo geht $s(t)$ los?

Für $t > 1$ gilt zunächst:

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq -\frac{t}{2} \\ \frac{x}{t} & -\frac{t}{2} < x \leq \sqrt{t} - t \\ -1 & x > \sqrt{t} - t \end{cases}$$



Wie lange?

Für $t = 4$ gilt $-\frac{t}{2} = \sqrt{t} - t$

Stoßwelle ist durch Verdünnungswelle durch! $s(4) = -2$, $u_l = -\frac{1}{2}$, $u_r = -1$

Neue Formel für Stoßfront für $t \geq 4$:

$$s(t) = s(4) + \dot{s}(t)(t-4) = -2 + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2} \cdot (t-4)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq -\frac{3}{4}t + 1\,, \\ -1 & x > -\frac{3}{4}t + 1\,. \end{cases}$$

Andere Differentialgleichung

$$\boxed{u_t + \left((u+1)^2\right)_x \;=\; 0\,, \qquad u(x,0) \;=\; u_0(x)}$$

Hier gilt $f(u) = (u+1)^2$ und $f'(u) = 2(u+1) =: v$,

also $g(v) = (f')^{-1}(v) = u = \frac{v}{2} - 1$

und $g(\frac{x-x_0}{t}) =$

Zum Beispiel für

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

erhalten wir eine Verdünnungswelle (Seite 16)

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + f'(u_l)\cdot t, \\ g\left(\dfrac{x-x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l)\cdot t < x < x_0 + f'(u_r)\cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + f'(u_r)\cdot t\,. \end{cases}$$

Für $u_l > u_r$ muss eine Stoßwelle eingeführt werden mit

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{(u_l + 1)^2 - (u_r + 1)^2}{u_l - u_r} =$$

Zum Beispiel für

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ -1 & x > 3 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t) = \\ u_r & x > s(t) = \end{cases}$$

Zur Hausaufgabe 3

Zur Erinnerung: Erhaltungsgleichung lautet

$$(\text{ Dichte })_t + (\text{ Fluss })_x = 0 \qquad \text{hier: } u_t + q_x = 0$$

wobei

$$\text{Fluss} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Dichte}$$

Wenn Sie Teil a) nicht schaffen, geht es in b) weiter mit

$$u_t + \left(u \cdot v_{max}\,(1 - \frac{u}{u_{max}})\right)_x = 0$$

Die Bedingung für Stoßwellen ist zwar bei Burgers $u_l > u_r$, im Allgemeinen aber:

$$f'(u_l) > f'(u_r) \qquad \text{hier} \qquad q'(u_l) > q'(u_r)$$

Die Sprungbedingung muss gelten!

Stoßwellen: Charakteristiken laufen in Stoßfront rein!