Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen II
Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung
Charakteristikenmethode

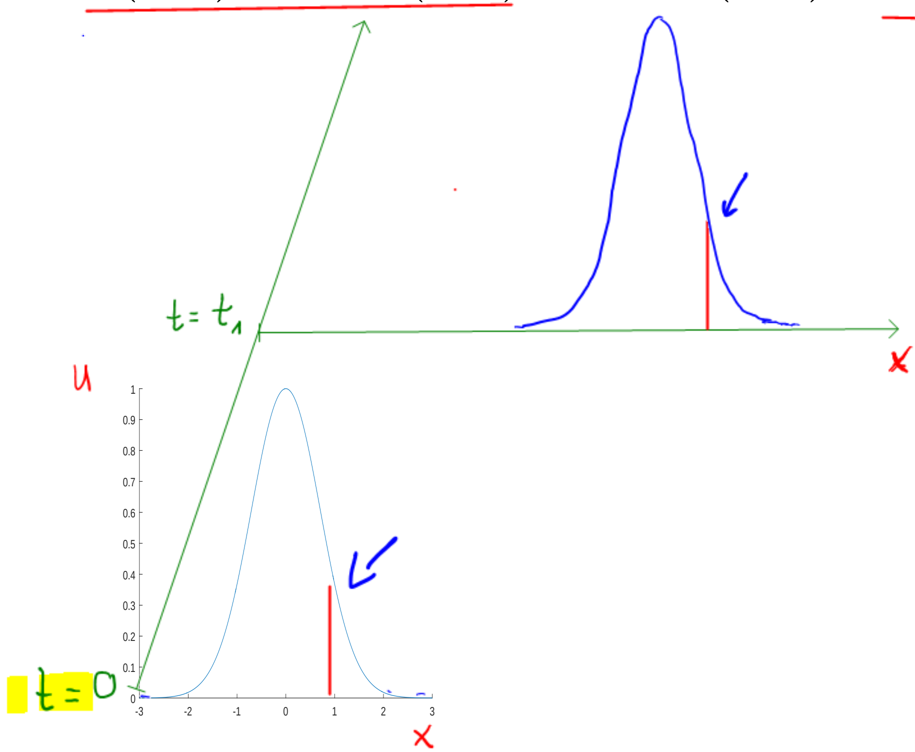
$u(x,t) =$ Dichte am Ort x zum Zeitpunkt t

Beispiel Erhaltungsgleichung: $u_t + (\overset{\text{Fluss}}{q}(u,v))_x = 0$

Einfachster (nicht konstanter Fall): Transportgleichung

Dichteprofil bewegt sich mit der Zeit, ohne sich zu verändern

$q(x,t) = c \cdot u(x,t) \longrightarrow u_t(x,t) + c \cdot u_x(x,t) = 0$ kurz $\boxed{u_t + cu_x = 0.}$



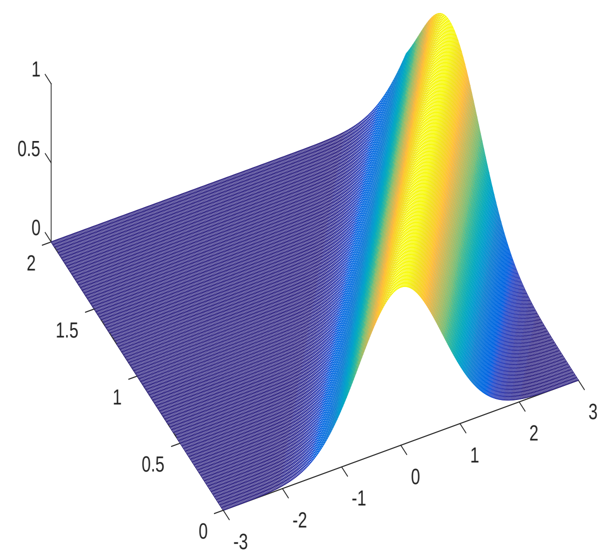
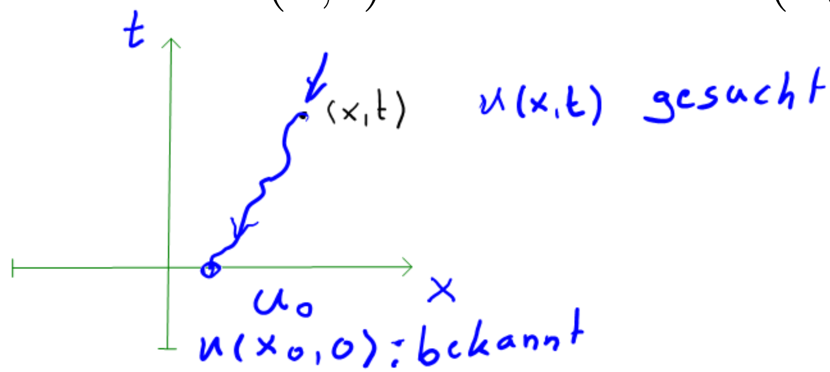


Abbildung 1: Anfangsfunktion $u(x,0)$ und Lösung $u(x,t)$

Idee: Zum Beispiel bei vorgegebenen Werten $u(x,\overset{t}{0}) = u_0(x)$

- Finde in $(x,t)-$Ebene Kurven $(x(t),t)$ entlang derer u konstant ist



- Finde Schnitt von Kurve $(x(t),t)$ mit Anfangskurve (hier $(t=0)$

- Lese Funktionswert ab.

1. Schritt: Auf den Kurven (**Charakteristiken**) soll $u(x(t),t) = K$ gelten, also

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_t \cdot \underbrace{\dot{t}(t)}_{1} = u_t + \dot{x}(t)\, u_x \overset{!}{=} 0$$

damit u konstant entlang $\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$u_t + c\,u_x = 0$$

wähle $\underline{\dot{x}(t) = c}$

Dann ist jede Lösung der Dgl konstant entlang $\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = c \implies x(t) = ct + K$$

2. Schritt: Zum Beispiel für die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$
mit $u(x, 0) = u_0(x) = f(x)$

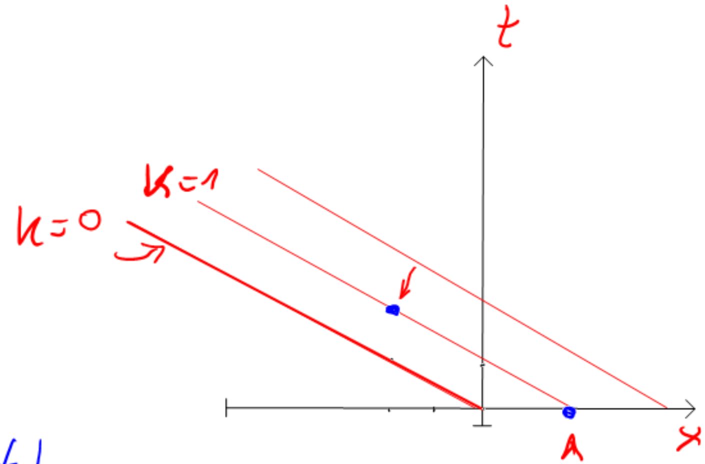
$\dot{x}(t) = c$

$x(t) = ct + k$

$x(0) = c \cdot 0 + k = k$

$u(x(t), t) = \underline{u(x(0), 0)} = u_0(x(0))$

$= u_0(k)$



$k = x - ct$

$u(x, t) = u_0(x - ct)$

vorgegeben durch Dgl

vorgegebene Funktion
z. B. sinus

A: Anfangswertaufgabe für Lineare homogene Differentialgleichung
(Koeffizienten nicht von u abhängig)

$$\begin{aligned} \beta(x,t)\,u_t(x,t) + a(x,t)\,u_x(x,t) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t \in \mathbb{R}^+, \qquad (*) \\ u(x,0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

gegebene Fktion z.B. sin(x)

Schritt 1: Bestimme Kurven $s \mapsto (x(s), t(s))^T$ mit

$$\boxed{\frac{dt}{ds} = \beta(x,t) \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t)}$$

Dann gilt längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds}u\,(x(s),t(s)) = u_x \cdot \frac{dx}{ds} + u_t \cdot \frac{dt}{ds} = \beta\,u_t + a\,u_x\,.$$

Also für jede Lösung u der DGL $\frac{d}{ds}u\,(x(s),t(s)) = 0.$

Jede Lösung der DGL (*) ist (im homogenen Fall) konstant entlang dieser Charakteristiken

Alternativ: Einfacher und schneller geht die konkrete Lösung im Fall $\beta(x,t) \neq 0$ mit t als Parameter:

Wir hatten $\dfrac{dt}{ds} = \beta(x,t) \qquad \dfrac{dx}{ds} = a(x,t)$

Die Charakteristiken sind Kurven $t \mapsto \binom{x(t)}{t}$ mit

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{a(x,t)}{\beta(x,t)}\,.}$$

→ Löse diese Dgl
→ x(t) mit Integrationskonstanten C

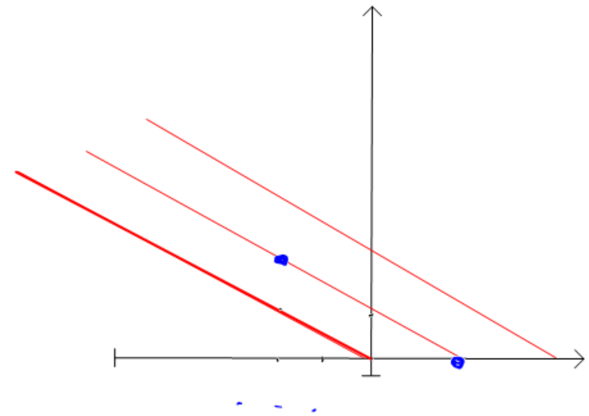
besagt auf welcher Kurve $\binom{x}{t}$ liegt

Schritt 2: Bestimme Schnitt der Charakteristik durch (x,t) mit Kurve der Anfangswerte.

Schritt 3: Lese Wert für $u(x,t)$ ab/Bestimme Formel für u(x,t).

Beispiel 1)

$$\overset{\beta}{2}u_t - \overset{a}{4}u_x = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\tfrac{x}{2})$$



$$\frac{dt}{ds} = 2 \qquad \frac{dx}{ds} = -4 \qquad \text{oder} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-4}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = -2t + k}$$

Lösung konstant auf den Geraden $\binom{x(t)}{t}$ mit $x = -2k + k$

Schnittpunkt der Geraden mit der $x-$ Achse (Anfangswerte) : $\boxed{x(0) = k}$

Auf der Charakteristik: $u(x(t),t) = u(x(0),0) = \sin(\frac{x(0)}{2})$

Wie hängt $k = x(0)$ von x und t ab?

$$\boxed{k = x + 2t}$$

Lösung : $u(x,t) = u(x(0),0) = u_0(x(0)) = u_0(k) = \sin(\frac{k}{2}) = \sin\left(\underbrace{\frac{x+2t}{2}}_{\frac{x_0}{2}}\right)$

ACHTUNG : Die Anfangswerte können nicht beliebig vorgegeben werden.

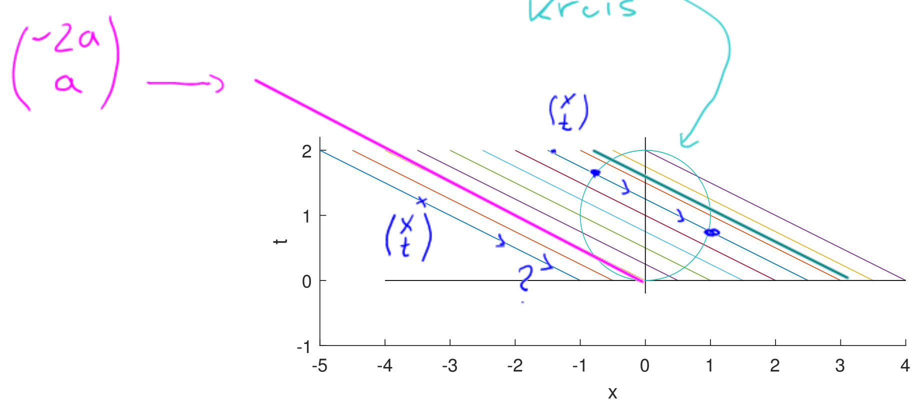
Obige DGL mit

$$\underline{u(-2a,a)} = g(a)$$

$\Longrightarrow$ keine oder unendlich viele Lösungen

Obige DGL mit

$$u(x,t) = x \ \text{ für } \ \underbrace{\sqrt{(t-1)^2 + x^2} = 1}_{\text{Kreis}} \quad \Longrightarrow \text{ keine Lösung.}$$



Beispiel 2)

$$1 \cdot u_t + (x+1)u_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für die Charakteristiken

$$\frac{dt}{ds} = 1\,, \qquad \frac{dx}{ds} = x + 1\,,$$

oder $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \underset{1}{\underline{x+1}}}$

$$\dot{x}(t) = x(t) + 1$$
$$\frac{dx}{x+1} = 1 \cdot dt$$

Also für $x \neq -1$:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int dt \implies \ln|x+1| = k + t \implies x(t) = ce^t - 1$$

$\xrightarrow{\exp}$ $|x+1| = e^{k+t} = e^k \cdot e^t = \hat{c}\, e^t \qquad \hat{c} \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow x + 1 = \pm \hat{c}\, e^t = c e^t \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = ce^t - 1$

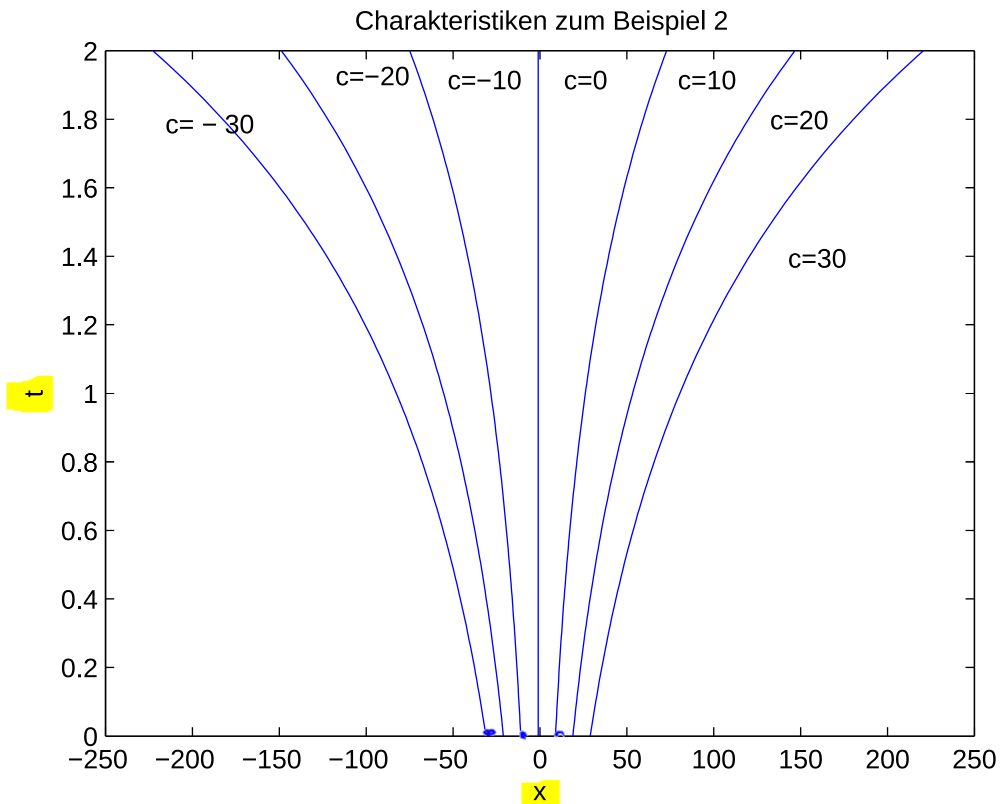
Für $c = 0$ erhalten wir $x(t) = -1$

$x(0) = -1$

Charakteristik $\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$

Die Dgl. $u_t + (x+1)u_x = 0$ lautet für $x = -1$:

$$u_t = 0 \implies u(-1,t) = u(-1,0) = g(-1).$$



Auf den Kurven ist die Lösung konstant und hängt nur von c ab.

Beachte: Charakteristiken sind keine Geraden mehr weil $\frac{dx}{dt}$ nicht konstant ist.

Es gilt $\frac{dx}{dt} = x + 1$

Schnitt mit der Anfangskurve $(x, 0)$

Wir hatten $\boxed{x(t) = ce^t - 1}$ also:

$$c = (x+1)e^{-t}$$

Für $t = 0$ gilt $\quad x_0 := x(0) = c - 1$

Das zu (x, t) gehörige x_0 ist also $\boxed{x_0 = (x+1)e^{-t} - 1}$

Auf jeder Charakteristik gilt dann wieder

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g\left((x+1)e^{-t} - 1 \right)$$

vorgegebene Anfangsfkt

Um auch den inhomogenen Fall lösen zu können

Beispiel 3): Eine Dimension mehr!

$$\boxed{2xu_x + yu_y + tu_t = 0,} \qquad x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

Zum Beispiel versehen mit Anfangsbedingung $\boxed{u(x, y, \overset{t}{2}) = \sin(x)e^{-y}.}$

Suche Kurven $(x(s), y(s), t(s))$ mit $u(x(s), y(s), t(s))$ <u>konstant!</u>

Dann gilt

$$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s), t(s)) = \boxed{u_x \cdot \overset{2x}{\frac{dx}{ds}} + u_y \overset{y}{\frac{dy}{ds}} + u_t \cdot \overset{t}{\frac{dt}{ds}} \overset{!}{=} 0}$$

Charakteristisches Differentialgleichungsystem:

wähle

$$\frac{dx}{ds} = 2x$$

$$\frac{dy}{ds} = y$$

$$\frac{dt}{ds} = t$$

Dann ist

$$\frac{d}{ds} u(x(s), y(s), t(s)) = u_x \cdot 2x + u_y \cdot y + u_t \cdot t = 0$$

für jede Lösung der Dgl

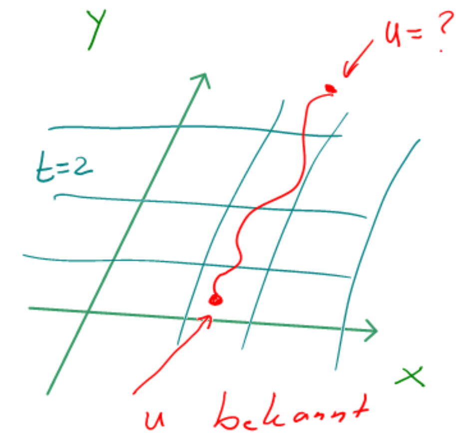
Also u konstant auf der Kurve $\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$

Einfacher zum praktischen rechnen

Oder mit t als Parameter für $t \neq 0$ für $2xu_x + yu_y + tu_t = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2x}{t} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} \end{aligned}\right\} \text{ lösen } \longrightarrow$$

zwei Integrationskonstanten, die festlegen auf welcher Kurve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$ liegt



$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{x}{t} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln(|x|) = 2\ln(|t|) + \hat{c}_1$$

$$\xrightarrow{\exp} |x| = e^{\ln(|t|)\cdot 2 + \hat{c}_1} = e^{\hat{c}_1}\cdot\left(e^{\ln(t)}\right)^2 = e^{\hat{c}_1}\cdot t^2$$

$$\longrightarrow \boxed{x = c_1 t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln(|y|) = \ln(|t|) + \hat{c}_2 \rightarrow \boxed{y = c_2 t}$$

Auf der Charakteristik gilt $u(x(t), y(t), t) = u(x(2), y(2), 2) = \sin(x(2))\, e^{-y(2)}$

$$x(2) = c_1 2^2 = 4c_1 \qquad y(2) = c_2 \cdot 2 = 2c_2$$

$$\boxed{c_1 = \frac{x}{t^2} \qquad c_2 = \frac{y}{t}}$$

Also $u(x, y, t) = u(4c_1, 2c_2, 2) = \sin(4c_1)\, e^{2c_2}$ $\longleftarrow$ $u(x,y,t)$ hängt nur von c_1 und c_2 ab

Lösung $\boxed{u(x,y,t) = \sin\left(\frac{4x}{t^2}\right) e^{-2\frac{y}{t}}}$

$u(x,y,t) = \phi(c_1, c_2)$

Jetzt allgemein: Quasilineare Differentialgleichung 1.Ordnung :

(Koeffizienten dürfen von u abhängen! Kann inhomogen sein)

Zum Beispiel:

$$1 \cdot u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,. \qquad (*)$$

Hilfsproblem : Suche Funktion $U(x,t,u)$, die die PDE

$U = U(x,t,u)$

$$1 \cdot U_t + a(x,t,u) \cdot U_x + b(x,t,u) \cdot U_u = 0 \qquad (1)$$

nur u statt y und U statt u

löst. Wie oben stellen wir auf:

Das charakteristische Differentialgleichungsystem mit s als Parameter

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u).} \qquad (2)$$

Dann gilt für jede Lösung U der DGL (1) längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds}U\left(x(s),t(s),u(s)\right) = U_x \cdot \frac{dx}{ds} + U_t \cdot \frac{dt}{ds} + U_u \cdot \frac{du}{ds}$$
$$= U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0$$

Also U konstant entlang der Charakteristiken

Integration des Systems (2) $\Longrightarrow$ Zwei Integrationskonstanten C_1, C_2

Charakteristiken werden durch 2 Parameter festgelegt

$U(x,t,u) = \tilde{\Phi}(C_1,C_2) = K$ konstant auf Charakteristiken

eine Gleichung, zwei Parameter : Löse auf nach c_2

$$\Phi = \tilde{\Phi} - K \Longrightarrow \Phi(C_1,C_2) = \Phi(C_1(x,t,u),C_2(x,t,u)) = 0$$

Eine Gleichung für zwei Unbekannte: Löse wenn möglich auf $\boxed{C_2 = f(C_1)}$
Löse wenn möglich nach u auf!

Exkurs: Nachweis Zusammenhang DGL (1) und ursprüngliches Problem

Auf jeder Charakteristik: $U(x,t,u) - K = 0$.

Falls $U_u \neq 0$, dann kann nach dem Satz über implizite Funktionen nach u aufgelöst werden: $u = u(x,t)$ mit

nach Satz über implizite Funktionen:
$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = -(U_u)^{-1} \begin{pmatrix} U_x \\ U_t \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot U_u} \begin{pmatrix} U_u \cdot u_x \\ U_u \cdot u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_x \\ -U_y \end{pmatrix}$$

Also $U_x = -u_x \cdot U_u \qquad U_t = -u_t \cdot U_u$

Dgl (1):
$$U_t + a U_x + b U_u = 0 \iff -u_t \cdot \cancel{U_u} - a u_x \cdot \cancel{U_u} + b \cancel{U_u} = 0$$
$$\iff -u_t - a u_x + b = 0$$
$$\iff u_t + a u_x = b \longleftrightarrow \text{ursprüngliche Dgl } (*)$$

u löst also ursprüngliche Differentialgleichung.

Beispiel 1: Eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe

$$u_t - 2u_x = t, \qquad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungsystem aufstellen:

$$\frac{dx}{dt} = -2 \qquad\qquad \frac{du}{dt} = t$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\Longrightarrow x(t) = -2t + C \qquad\qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + D$$

$$C = x + 2t \qquad\qquad D = u - \frac{t^2}{2}$$

Schritt 3: Wenn möglich $D = f(C)$ nach u auflösen

$$u - \frac{t^2}{2} = f(x+2t) \Longrightarrow \underbrace{\boxed{u = \frac{t^2}{2} + f(x+2t)}}$$

löst für jedes differenzierb. f die Dgl

$u_t = t + f'(x+2t) \cdot 2$

$u_x = f'(x+2t)$

$u_t - 2x = t$ ✓

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

$$\boxed{u(x,t) = \frac{t^2}{2} + f(x+2t)} \Longrightarrow u(x,0) = \frac{0^2}{2} + f(x+2\cdot 0) = f(x)$$

Anfangsbedingung $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$u(x,t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{1+(x+2t)^2}$$

Beispiel 2)

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \qquad u(x,1) = 1 \qquad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}^+$$

Hilfsproblem: $U_x + y^2 \bar{U}_y + u^2 U_u = 0$

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungsystem aufstellen:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad , \qquad \frac{du}{dx} = u^2$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 1 \, dx \,, \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x - C_1 \Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{y} + x}$$

völlig analog erhält man $\boxed{C_2 = \frac{1}{u} + x}$

Schritt 3: Wenn möglich $C_2 = f(C_1)$ nach u auflösen

Lösungen erfüllen : $\Phi(C_1, C_2) = \Phi(\underbrace{\frac{1}{y} + x}_{C_1}, \underbrace{\frac{1}{u} + x}_{C_2}) = 0$

Im Falle der Auflösbarkeit gilt: $C_2 = f(C_1)$

$$\frac{1}{u} + x = f\left(\frac{1}{y} + x\right)$$

<u>oder</u> erst umstellen nach u

$$\frac{1}{u} = f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x$$

$$\boxed{u = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x}}$$

$$u(x,1) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{1} + x\right) - x} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Longrightarrow f(1 + x) - x \stackrel{!}{=} 1$$

$$f(1 + x) = 1 + x$$

$$\Longrightarrow f = \text{Identität}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x} = \frac{1}{\frac{1}{y} + \underbrace{x - x}_{0}} = y$$

<u>Entweder</u> schon hier $u(x,1) = 1$ nutzen

$$\frac{1}{u(x,1)} + x \stackrel{!}{=} f\left(\frac{1}{1} + x\right)$$

$$\Longrightarrow 1 + x = f(1 + x)$$

$$\Longrightarrow f = \text{Identität, also } f(\mu) = \mu \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Anfangswerte $\quad u(x,1) \stackrel{!}{=} 1$:

$$u(x,y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x} \stackrel{y=1}{\Longrightarrow}$$

s. oben

Beispiel 3: (nur bei genügend Zeit)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u_t + 2x u_x = tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = \sin(x).$$

Lösung:

Für die Charakteristiken gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2x \implies \quad \int \frac{dx}{x} = \int 2\, dt \implies \ln(|x|) = 2t + \tilde{c}_1 \longrightarrow \pm x = e^{2t+\tilde{c}_1} = \hat{c}_1 e^{2t}$$

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \qquad \boxed{c_1 = xe^{-2t}.}$$

Auf diesen Charakteristiken gilt

$$\frac{du}{dt} = tu \implies \quad \frac{du}{u} = t\, dt \implies \ln(|u|) = \frac{t^2}{2} + \tilde{c}_2 \implies \pm u = e^{\frac{t^2}{2}+\tilde{c}_2} = \hat{c}_2 e^{t^2/2}$$

$$u(x(t),t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \implies$$

Also $\boxed{c_2 = \; ue^{-\frac{t^2}{2}}}$

Mit einem geeigneten Φ gilt dann: $\Phi(c_1, c_2) = 0 \implies$

Falls auflösbar nach c_2 : $\boxed{c_2 = \; f(c_1) \; :}$

$c_2 = ue^{-t^2/2} = f(xe^{-2t}) \implies \underline{u(x,t) = e^{+t^2/2} f(xe^{-2t})}$ allgemeine Lösung

Andererseits $u(x, 0) \overset{!}{=} \sin(x)$, also

$u(x, 0) = \; e^{-0} f(xe^{-0}) = f(x) \overset{!}{=} \sin(x) \implies f \mathrel{\hat{=}} \sin$

Damit erhalten wir die Lösung

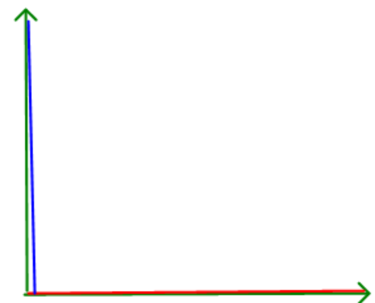
$$u(x, t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}} .$$

Beispiel 4) (ARWA)

Ermitteln Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$\boxed{u_t + 2u_x = -u}$

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + u &= 0, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t^2 \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$



mittels der Charakteristikenmethode.

IDEE: Bestimme jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$, und eine zur Randbedingung $u(0,t) = t^2$ und setze diese Lösungen glatt zusammen.

Mit der Charakteristikenmethode erhält man: $\dfrac{dx}{dt} = 2, \ \dfrac{du}{dt} = -u$

$x(t) = 2t + C_1 \qquad u(x(t),t) = C_2 e^{-t}$

$\Longrightarrow \boxed{C_1 = x - 2t, \ C_2 = ue^t}$ $\qquad C_2 = f(C_1) \qquad ue^t = f(x-2t)$

$\Phi\left(x - 2t, ue^t\right) = 0$ liefert bei Auflösbarkeit

$\boxed{u = e^{-t} f(x - 2t).}$ $\qquad$ Allgemeine Lösung

Aus den Randwerten $u(0,t) = t^2$ erhält man

$u(0,t) = e^{-t} f(x-2t) \stackrel{!}{=} t^2$

$t^2 = e^{-t} f(0-2t)$ $\Longrightarrow$ $f(\underbrace{-2t}_{\mu}) = e^{t} \cdot t^2$

$f(\mu) = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{in } \mu \text{ ausgedrückt}}$

oder mit $\mu = -2t$ bzw. $t = -\frac{\mu}{2}$

$f(-2t) = e^{t} \cdot t^2$

$$f(\mu) = \left(-\frac{\mu}{2}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{2}}$$

und damit erhält man für die Lösung

$$u_R(x,t) = e^{-t} f(x-2t) = e^{-t} \left(-\frac{x-2t}{2}\right)^2 e^{\frac{-(x-2t)}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{2t-x}{2}\right)^2$$

$$\cancel{e^{-t}} \left(\frac{2t-x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cancel{e^{\frac{2t}{2}}}$$

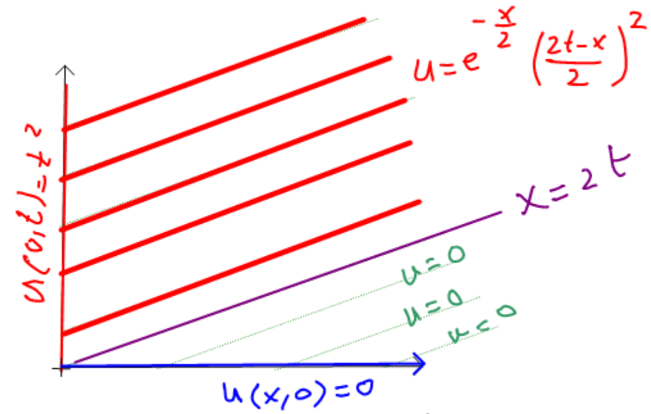
u_R erfüllt DGL

und $u_R(0,t) = t^2$

aber $u_R(x,0) \neq 0$

Setzt man dagegen in die allgemeine Lösung $u(x,t) = e^{-t}\tilde{f}(x-2t)$

Die Anfangsdaten $u(x,0) = 0$ ein, so erhält man:



$u(x,0) = e^0 \tilde{f}(x-2\cdot 0) = \tilde{f}(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \tilde{f} \equiv 0$

$\Longrightarrow u_A \equiv 0$

u_A erfüllt DGL und $u(x,0)=0$ aber nicht $u(0,t)=t^2$

Die Lösungen können entlang Kurven glatt zusammen gesetzt werde, auf denen $u_R = \tilde{u}_A$ gilt. Dies ist auf der Geraden $x = 2t$ der Fall. Man erhält also als Lösung des ursprünglichen Problems

$u_A = 0 = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{2t-x}{2}\right)^2 = u_R$

$\Longrightarrow \frac{2t-x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2t$

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{2t-x}{2}\right)^2 & x \leq 2t \\ 0 & x > 2t \end{cases}$$

Wobei noch zu prüfen wäre, ob die Lösung entlang der Geraden $x = 2t$ stetig (partiell-) differenzierbar ist.

prüfe $\lim_{x \to 2t} (u_R)_x \overset{?}{=} \lim_{x \to 2t} (u_A)_x$

und $\lim_{x \to 2t} (u_R)_t = \lim_{x \to 2t} (u_A)_t$

Wenn nicht: u ist keine klassische Lösung für das ganze Gebiet. Mehr auf Blatt 3.