Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen II
Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung
Charakteristikenmethode

Beispiel Erhaltungsgleichung: $u_t + (q(u,v))_x = 0$

Einfachster (nicht konstanter Fall): Transportgleichung

Dichteprofil bewegt sich mit der Zeit, ohne sich zu verändern

$q(x,t) = c \cdot u(x,t) \longrightarrow u_t(x,t) + c \cdot u_x(x,t) = 0$ kurz $u_t + cu_x = 0$.

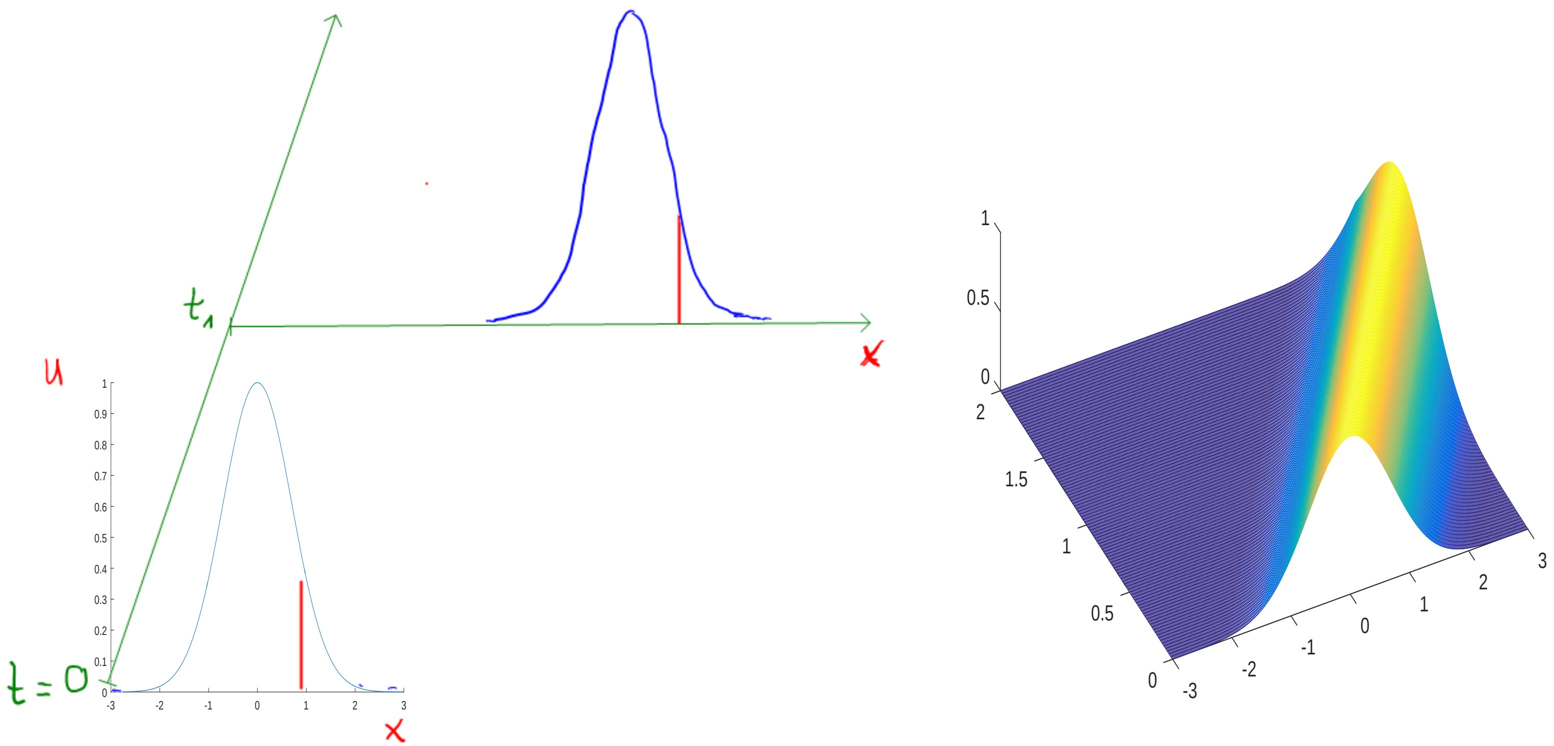
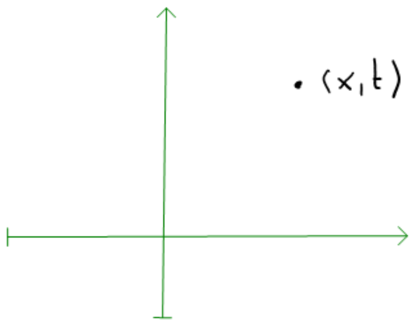


Abbildung 1: Anfangsfunktion $u(x,0)$ und Lösung $u(x,t)$

Idee: Zum Beispiel bei vorgegebenen Werten $u(x, 0) = u_0(x)$

- Finde in $(x, t)-$Ebene Kurven $(x(t), t)$ entlang derer u konstant ist



- Finde Schnitt von Kurve $(x(t), t)$ mit Anfangskurve (hier $(t = 0)$

- Lese Funktionswert ab.

1. Schritt: Auf den Kurven (**Charakteristiken**) soll $u(x(t), t) = K$ gelten, also

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) =$$

2. Schritt: Zum Beispiel für die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$
mit $u(x,0) = u_0(x) = f(x)$

$\dot{x}(t) =$

$x(t) =$

$x(0) =$

$u(x(t),t) = u(x(0),0)$

A: Anfangswertaufgabe für Lineare homogene Differentialgleichung

(Koeffizienten nicht von u abhängig)

$$\beta(x,t)\,u_t(x,t) \,+\, a(x,t)\,u_x(x,t) \,=\, 0 \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R}^+, \qquad (*)$$
$$u(x,0) \,=\, g(x) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Schritt 1: Bestimme Kurven $\quad s \mapsto (x(s), t(s))^T$ mit

$$\frac{dt}{ds} \,=\, \beta(x,t) \qquad \frac{dx}{ds} \,=\, a(x,t)$$

Dann gilt längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds} u\,(x(s), t(s)) \,=\, u_x \cdot \frac{dx}{ds} \,+\, u_t \cdot \frac{dt}{ds} \,=\, \beta\, u_t \,+\, a\, u_x\,.$$

Also für jede Lösung u der DGL $\dfrac{d}{ds} u\,(x(s), t(s)) = 0$.

Jede Lösung der DGL (*) ist (im homogenen Fall) konstant entlang dieser Charakteristiken

Alternativ: Einfacher und schneller geht die konkrete Lösung im Fall $\beta(x,t) \neq 0$ mit t als Parameter:

Wir hatten $\dfrac{dt}{ds} = \beta(x,t) \qquad \dfrac{dx}{ds} = a(x,t)$

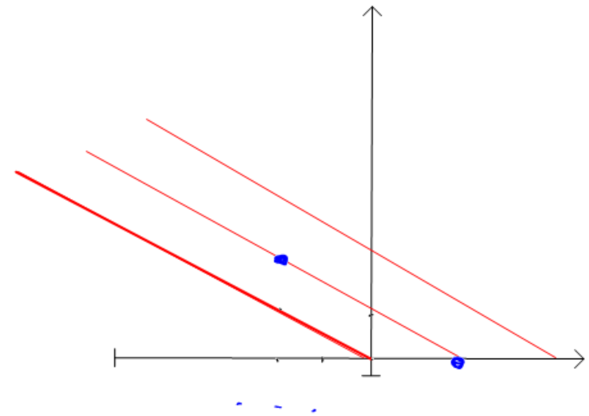
Die Charakteristiken sind Kurven $t \mapsto \binom{x(t)}{t}$ mit

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{a(x,t)}{\beta(x,t)}.$$

Schritt 2: Bestimme Schnitt der Charakteristik durch (x,t) mit Kurve der Anfangswerte.

Schritt 3: Lese Wert für $u(x,t)$ ab/Bestimme Formel für u(x,t).

Beispiel 1)



$2u_t - 4u_x = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\frac{x}{2})$

$\frac{dt}{ds} = \qquad \frac{dx}{ds} = \qquad$ oder $\quad \frac{dx}{dt} =$

$\Longrightarrow x(t) =$

Lösung konstant auf den Geraden $\binom{x(t)}{t}$ mit $x =$

Schnittpunkt der Geraden mit der $x-$ Achse
(Anfangswerte) : $x(0) = k$

Auf der Charakteristik: $u(x(t),t) = u(x(0),0) = \sin(\frac{x(0)}{2})$

Wie hängt $k = x(0)$ von x und t ab?

$k =$

Lösung : $u(x,t) =$

ACHTUNG : Die Anfangswerte können nicht beliebig vorgegeben werden.

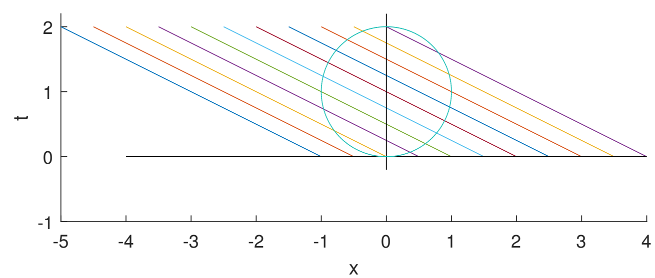
Obige DGL mit

$u(-2a, a) = g(a)$

$\Longrightarrow$ keine oder unendlich viele Lösungen

Obige DGL mit

$u(x,t) = x$ für $\sqrt{(t-1)^2 + x^2} = 1 \quad \Longrightarrow$ keine Lösung.



Beispiel 2)

$$1 \cdot u_t + (x+1)u_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für die Charakteristiken

$$\frac{dt}{ds} = 1\,, \qquad \frac{dx}{ds} = x + 1\,,$$

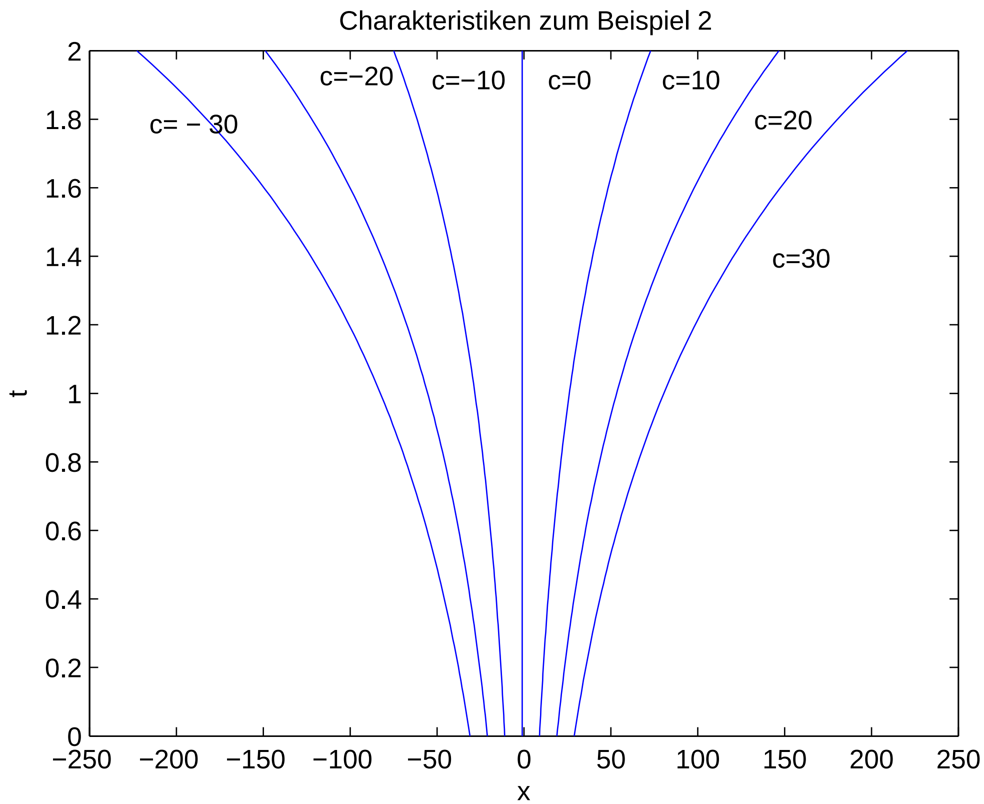
oder $\quad \dfrac{dx}{dt} = x + 1$

Also für $x \neq -1$:

$$\frac{dx}{x+1} = dt \implies \ln|x+1| = k + t \implies x(t) = ce^t - 1$$

Die Dgl. $u_t + (x+1)u_x = 0$ lautet für $x = -1$:

$u_t = 0 \implies u(-1,t) = u(-1,0) = g(-1).$



Auf den Kurven ist die Lösung konstant und hängt nur von c ab.

Wir hatten $x(t) = ce^t - 1$ also:

$$c =$$

Für $t = 0$ gilt $\qquad x_0 := x(0) = c - 1$

Das zu (x, t) gehörige x_0 ist also $\boxed{x_0 = \qquad\qquad\qquad}$

Auf jeder Charakteristik gilt dann wieder

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$$

Beispiel 3): Eine Dimension mehr!

$$2xu_x + yu_y + tu_t = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

Zum Beispiel versehen mit Anfangsbedingung $u(x, y, 2) = \sin(x)e^{-y}$.

Suche Kurven $(x(s), y(s), t(s))$ mit $u(x(s), y(s), t(s))$ konstant!

Dann gilt

$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s), t(s)) =$

Charakteristisches Differentialgleichungsystem:

Oder mit t als Parameter für $t \neq 0$ für $2xu_x + yu_y + tu_t = 0$

Jetzt allgemein: Quasilineare Differentialgleichung 1.Ordnung :

(Koeffizienten dürfen von u abhängen! Kann inhomogen sein)

Zum Beispiel:

$$1 \cdot u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem : Suche Funktion $U(x,t,u)$, die die PDE

$$1 \cdot U_t + a(x,t,u) \cdot U_x + b(x,t,u) \cdot U_u = 0 \qquad (1)$$

löst. Wie oben stellen wir auf:

Das charakteristische Differentialgleichungsystem mit s als Parameter

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \qquad (2)$$

Dann gilt für jede Lösung U der DGL (1) längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U\left(x(s), t(s), u(s)\right) &= U_x \cdot \frac{dx}{ds} + U_t \cdot \frac{dt}{ds} + U_u \cdot \frac{du}{ds} \\ &= U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0 \end{aligned}$$

Integration des Systems (2) $\Longrightarrow$ Zwei Integrationskonstanten C_1, C_2

Charakteristiken werden durch 2 Parameter festgelegt

$U(x,t,u) = \tilde{\Phi}(C_1, C_2) = K$ konstant auf Charakteristiken

$\Phi = \tilde{\Phi} - K \Longrightarrow \Phi(C_1, C_2) = \Phi(C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)) = 0$

Eine Gleichung für zwei Unbekannte: Löse wenn möglich auf $C_2 = f(C_1)$
Löse wenn möglich nach u auf!

Exkurs: Nachweis Zusammenhang DGL (1) und ursprüngliches Problem

Auf jeder Charakteristik: $U(x,t,u) - K = 0$.

Falls $U_u \neq 0$, dann kann nach dem Satz über implizite Funktionen nach u aufgelöst werden: $u = u(x,t)$ mit

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = -(U_u)^{-1} \begin{pmatrix} U_x \\ U_t \end{pmatrix}$$

Also $U_x = -u_x \cdot U_u \qquad U_t = -u_t \cdot U_u$

$$\begin{aligned} U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0 &\Longleftrightarrow -u_t \cdot U_u - a\,u_x \cdot U_u + b\,U_u = 0 \\ &\Longleftrightarrow -u_t - a\,u_x + b = 0 \end{aligned}$$

u löst also ursprüngliche Differentialgleichung.

Beispiel 1: Eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe

$$u_t - 2u_x = t, \qquad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungssystem aufstellen:

$\frac{dx}{dt} =$ $\qquad$ $\frac{du}{dt} =$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$\Longrightarrow x(t) =$ $\qquad$ $u(t) =$

$C =$ $\qquad$ $D =$

Schritt 3: Wenn möglich $D = f(C)$ nach u auflösen

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Beispiel 2)

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \qquad u(x,1) = 1 \qquad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}^+$$

Hilfsproblem: U

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungssystem aufstellen:

$$\frac{dy}{dx} = \qquad , \qquad \frac{du}{dx} =$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx\,, \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x - C_1 \Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{y} + x}$$

völlig analog erhält man $\boxed{C_2 = \frac{1}{u} + x}$

Schritt 3: Wenn möglich $C_2 = f(C_1)$ nach u auflösen

Lösungen erfüllen : $\Phi(C_1, C_2) = \Phi(\frac{1}{y} + x, \frac{1}{u} + x) = 0$

Im Falle der Auflösbarkeit gilt: $C_2 = f(C_1)$

$\frac{1}{u} + x =$

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Anfangswerte $\quad u(x,1) \overset{!}{=} 1$:

$$u(x,y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x} \overset{y=1}{\Longrightarrow}$$

Beispiel 3: (nur bei genügend Zeit)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2xu_x &= tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Lösung:

Für die Charakteristiken gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2x \quad \Longrightarrow$$

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \qquad c_1 = xe^{-2t}.$$

Auf diesen Charakteristiken gilt

$$\frac{du}{dt} = tu \quad \Longrightarrow$$

$$u(x(t),t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \Longrightarrow$$

Also $c_2 = \; ue^{-\frac{t^2}{2}}$

Mit einem geeigneten Φ gilt dann: $\Phi(c_1, c_2) = 0 \implies$

Falls auflösbar nach c_2 : $c_2 = \; f(c_1)$:

$c_2 =$

Andererseits $u(x,0) \stackrel{!}{=} \sin(x)$, also

$u(x,0) =$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\,.$$

Beispiel 4) (ARWA)

Ermitteln Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + u &= 0, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t^2 \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

mittels der Charakteristikenmethode.

IDEE: Bestimme jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$, und eine zur Randbedingung $u(0,t) = t^2$ und setze diese Lösungen glatt zusammen.

Mit der Charakteristikenmethode erhält man: $\dfrac{dx}{dt} = 2$, $\dfrac{du}{dt} = -u$

$x(t) = 2t + C_1 \qquad u(x(t),t) = C_2 e^{-t}$

$\Longrightarrow C_1 = x - 2t,\ C_2 = ue^t$

$\Phi\left(x - 2t, ue^t\right) = 0$ liefert bei Auflösbarkeit

$u = e^{-t} f(x - 2t).$

Aus den Randwerten $u(0,t) = t^2$ erhält man

$$t^2 = e^{-t} f(0 - 2t)$$

oder mit $\mu = -2t$ bzw. $t = -\frac{\mu}{2}$

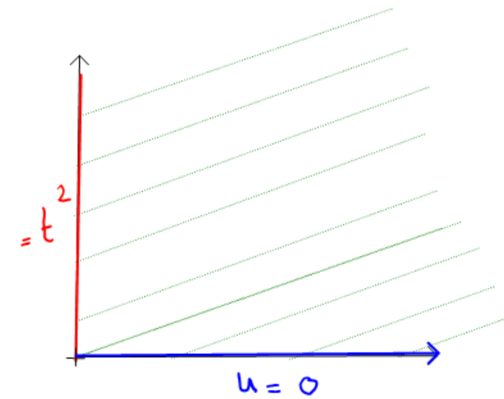
$$f(\mu) = \left(-\tfrac{\mu}{2}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{2}}$$

und damit erhält man für die Lösung

$$u_R(x,t) = e^{-t} f(x - 2t) = e^{-t} \left(-\frac{x - 2t}{2}\right)^2 e^{\frac{-(x-2t)}{2}} \;=\; e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{2t - x}{2}\right)^2$$

Setzt man dagegen in die allgemeine Lösung $u(x,t) = e^{-t}\tilde{f}(x-2t)$

Die Anfangsdaten $u(x,0) = 0$ ein, so erhält man:



Die Lösungen können entlang Kurven glatt zusammen gesetzt werde, auf denen $u = \tilde{u}$ gilt. Dies ist auf der Geraden $x = 2t$ der Fall. Man erhält also als Lösung des ursprünglichen Problems

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}}\left(\dfrac{2t-x}{2}\right)^2 & x \leq 2t \\ 0 & x \;>\; 2t \end{cases}$$

Wobei noch zu prüfen wäre, ob die Lösung entlang der Geraden $x = 2t$ stetig (partiell-) differenzierbar ist.