

Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen II

Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Charakteristikenmethode

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Die Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Beispiel Erhaltungsgleichung: $u_t + (q(u, v))_x = 0$

Einfachster (nicht konstanter Fall): Transportgleichung

Dichteprofil bewegt sich mit der Zeit, ohne sich zu verändern

$$q(x, t) = c \cdot u(x, t) \longrightarrow u_t(x, t) + c \cdot u_x(x, t) = 0 \text{ kurz } u_t + cu_x = 0.$$

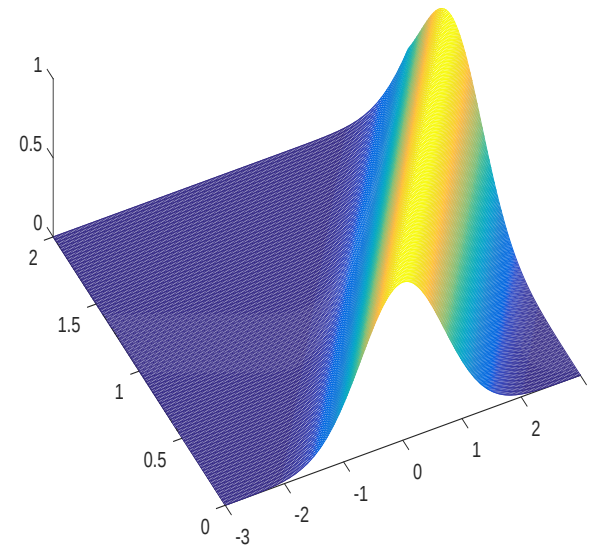
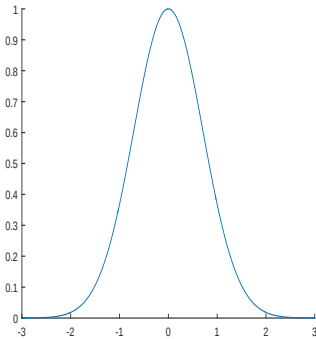


Abbildung 1: Anfangsfunktion $u(x, 0)$ und Lösung $u(x, t)$

Idee: Zum Beispiel bei vorgegebenen Werten $u(x, 0) = u_0(x)$

- Finde in (x, t) –Ebene Kurven $(x(t), t)$ entlang derer u konstant ist

- Finde Schnitt von Kurve $(x(t), t)$ mit Anfangskurve (hier $t = 0$)

- Lese Funktionswert ab.

1. Schritt: Auf den Kurven (**Charakteristiken**) soll $u(x(t), t) = K$ gelten, also

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) =$$

2. Schritt: Zum Beispiel für die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$
mit $u(x, 0) = u_0(x) = f(x)$

$$\dot{x}(t) =$$

$$x(t) =$$

$$x(0) =$$

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0)$$

A: Anfangswertaufgabe für Lineare homogene Differentialgleichung
(Koeffizienten nicht von u abhängig)

$$\begin{aligned}\beta(x, t) u_t(x, t) + a(x, t) u_x(x, t) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (*) \\ u(x, 0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Schritt 1: Bestimme Kurven $s \mapsto (x(s), t(s))^T$ mit

$$\frac{dt}{ds} = \beta(x, t) \quad \frac{dx}{ds} = a(x, t)$$

Dann gilt längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = u_x \cdot \frac{dx}{ds} + u_t \cdot \frac{dt}{ds} = \beta u_t + a u_x.$$

Also für jede Lösung u der DGL $\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = 0$.

Jede Lösung der DGL (*) ist (im homogenen Fall) konstant entlang dieser Charakteristiken

Alternativ: Einfacher und schneller geht die konkrete Lösung im Fall $\beta(x, t) \neq 0$ mit t als Parameter:

Wir hatten $\frac{dt}{ds} = \beta(x, t) \quad \frac{dx}{ds} = a(x, t)$

Die Charakteristiken sind Kurven $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t)}{\beta(x, t)}.$$

Schritt 2: Bestimme Schnitt der Charakteristik durch (x, t) mit Kurve der Anfangswerte.

Schritt 3: Lese Wert für $u(x, t)$ ab/Bestimme Formel für $u(x, t)$.

Beispiel 1)

$$2u_t - 4u_x = 0, \quad u(x, 0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{dt}{ds} = \quad \frac{dx}{ds} = \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} =$$

$$\implies x(t) =$$

Lösung konstant auf den Geraden $\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit $x =$

Schnittpunkt der Geraden mit der x -Achse
(Anfangswerte) : $x(0) = k$

Auf der Charakteristik: $u(x(t), t) = u(x(0), 0) = \sin\left(\frac{x(0)}{2}\right)$

Wie hängt $k = x(0)$ von x und t ab?

$$k =$$

Lösung : $u(x, t) =$

ACHTUNG : Die Anfangswerte können nicht beliebig vorgegeben werden.

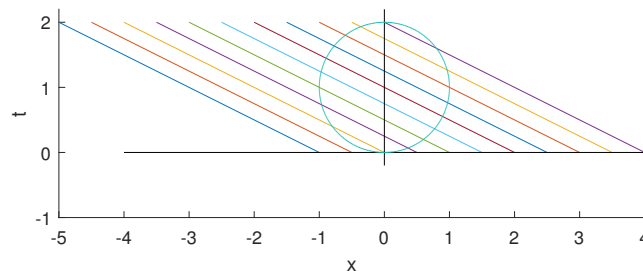
Obige DGL mit

$$u(-2a, a) = g(a)$$

$\implies$ keine oder unendlich viele Lösungen

Obige DGL mit

$$u(x, t) = x \text{ für } \sqrt{(t-1)^2 + x^2} = 1 \implies \text{keine Lösung.}$$



Beispiel 2)

$$1 \cdot u_t + (x + 1)u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für die Charakteristiken

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = x + 1,$$

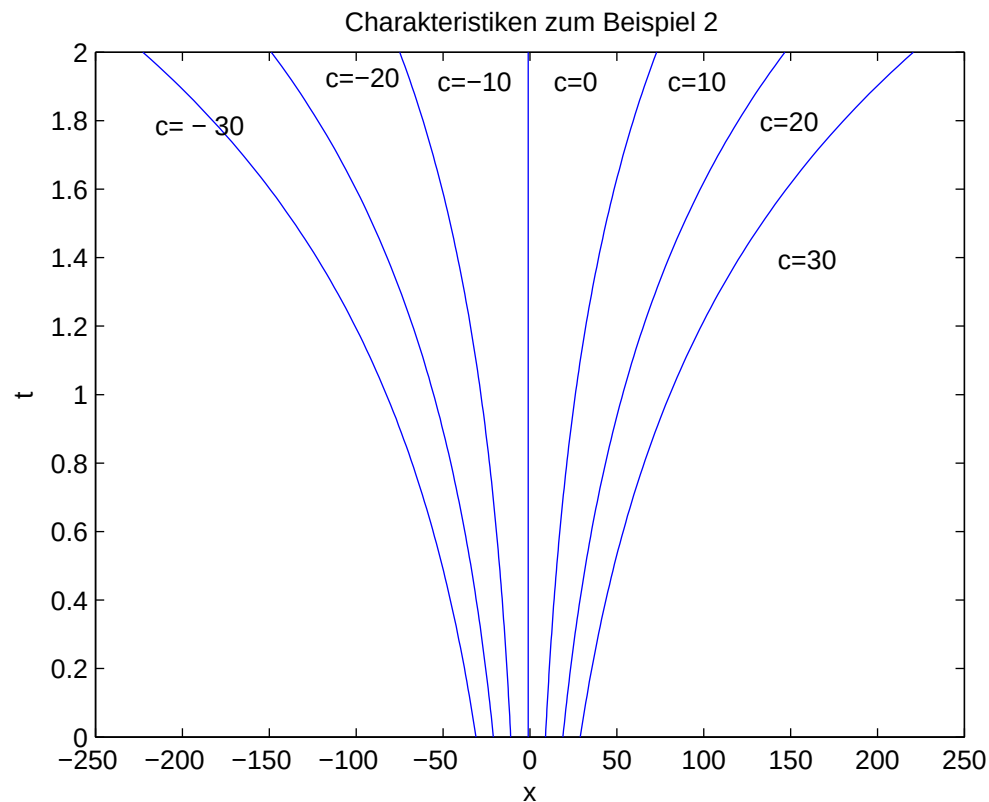
oder $\frac{dx}{dt} = x + 1$

Also für $x \neq -1$:

$$\frac{dx}{x + 1} = dt \implies \ln |x + 1| = k + t \implies x(t) = ce^t - 1$$

Die Dgl. $u_t + (x + 1)u_x = 0$ lautet für $x = -1$:

$$u_t = 0 \implies u(-1, t) = u(-1, 0) = g(-1).$$



Auf den Kurven ist die Lösung konstant und hängt nur von c ab.

Wir hatten $x(t) = ce^t - 1$ also:

$$c =$$

Für $t = 0$ gilt $x_0 := x(0) = c - 1$

Das zu (x, t) gehörige x_0 ist also $x_0 =$

Auf jeder Charakteristik gilt dann wieder

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g(\quad)$$

Beispiel 3): Eine Dimension mehr!

$$2xu_x + yu_y + tu_t = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

Zum Beispiel versehen mit Anfangsbedingung $u(x, y, 2) = \sin(x)e^{-y}$.

Suche Kurven $(x(s), y(s), t(s))$ mit $u(x(s), y(s), t(s))$ konstant!

Dann gilt

$$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s), t(s)) =$$

Charakteristisches Differentialgleichungssystem:

Oder mit t als Parameter für $t \neq 0$ für $2xu_x + yu_y + tu_t = 0$

Jetzt allgemein: Quasilineare Differentialgleichung 1.Ordnung :

(Koeffizienten dürfen von u abhängen! Kann inhomogen sein)

Zum Beispiel:

$$1 \cdot u_t(x, t) + a(x, t, u) u_x(x, t) = b(x, t, u) .$$

Hilfsproblem : Suche Funktion $U(x, t, u)$, die die PDE

$$1 \cdot U_t + a(x, t, u) \cdot U_x + b(x, t, u) \cdot U_u = 0 \quad (1)$$

löst. Wie oben stellen wir auf:

Das charakteristische Differentialgleichungssystem mit s als Parameter

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \frac{dx}{ds} = a(x, t, u), \quad \frac{du}{ds} = b(x, t, u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, u), \quad \frac{du}{dt} = b(x, t, u). \quad (2)$$

Dann gilt für jede Lösung U der DGL (1) längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} U(x(s), t(s), u(s)) &= U_x \cdot \frac{dx}{ds} + U_t \cdot \frac{dt}{ds} + U_u \cdot \frac{du}{ds} \\ &= U_t + a U_x + b U_u = 0\end{aligned}$$

Integration des Systems (2) $\implies$ Zwei Integrationskonstanten C_1, C_2

Charakteristiken werden durch 2 Parameter festgelegt

$U(x, t, u) = \tilde{\Phi}(C_1, C_2) = K$ konstant auf Charakteristiken

$$\Phi = \tilde{\Phi} - K \implies \Phi(C_1, C_2) = \Phi(C_1(x, t, u), C_2(x, t, u)) = 0$$

Eine Gleichung für zwei Unbekannte: Löse wenn möglich auf $C_2 = f(C_1)$
Löse wenn möglich nach u auf!

Exkurs: Nachweis Zusammenhang DGL (1) und ursprüngliches Problem

Auf jeder Charakteristik: $U(x, t, u) - K = 0$.

Falls $U_u \neq 0$, dann kann nach dem Satz über implizite Funktionen nach u aufgelöst werden: $u = u(x, t)$ mit

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = -(U_u)^{-1} \begin{pmatrix} U_x \\ U_t \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } U_x = -u_x \cdot U_u \quad U_t = -u_t \cdot U_u$$

$$\begin{aligned} U_t + a U_x + b U_u &= 0 \iff -u_t \cdot U_u - a u_x \cdot U_u + b U_u = 0 \\ &\iff -u_t - a u_x + b = 0 \end{aligned}$$

u löst also ursprüngliche Differentialgleichung.

Beispiel 1: Eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe

$$u_t - 2u_x = t, \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$$

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungssystem aufstellen:

$$\frac{dx}{dt} = \quad \quad \quad \frac{du}{dt} =$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\implies x(t) = \quad \quad \quad u(t) =$$

$$C = \quad \quad \quad D =$$

Schritt 3: Wenn möglich $D = f(C)$ nach u auflösen

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Beispiel 2)

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \quad u(x, 1) = 1 \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$$

Hilfsproblem: U

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungssystem aufstellen:

$$\frac{dy}{dx} = \quad , \quad \frac{du}{dx} =$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx, \implies -\frac{1}{y} = x - C_1 \implies \boxed{C_1 = \frac{1}{y} + x}$$

völlig analog erhält man $\boxed{C_2 = \frac{1}{u} + x}$

Schritt 3: Wenn möglich $C_2 = f(C_1)$ nach u auflösen

Lösungen erfüllen : $\Phi(C_1, C_2) = \Phi\left(\frac{1}{y} + x, \frac{1}{u} + x\right) = 0$

Im Falle der Auflösbarkeit gilt: $C_2 = f(C_1)$

$$\frac{1}{u} + x =$$

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Anfangswerte $u(x, 1) \stackrel{!}{=} 1$:

$$u(x, y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x} \xrightarrow{y=1}$$

Beispiel 3: (nur bei genügend Zeit)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t + 2xu_x &= tu, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \sin(x).\end{aligned}$$

Lösung:

Für die Charakteristiken gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2x \quad \Longrightarrow$$

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \quad c_1 = x e^{-2t}.$$

Auf diesen Charakteristiken gilt

$$\frac{du}{dt} = tu \quad \Longrightarrow$$

$$u(x(t), t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \Longrightarrow$$

Also $c_2 = ue^{-\frac{t^2}{2}}$

Mit einem geeigneten Φ gilt dann: $\Phi(c_1, c_2) = 0 \implies$

Falls auflösbar nach c_2 : $c_2 = f(c_1)$:

$c_2 =$

Andererseits $u(x, 0) \stackrel{!}{=} \sin(x)$, also

$u(x, 0) =$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}} .$$

Beispiel 4) (ARWA)

Ermitteln Sie die Lösung $u(x, t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$u_t + 2u_x + u = 0, \quad x, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0)$$

$$u(0, t) = t^2 \quad (t \geq 0)$$

mittels der Charakteristikenmethode.

IDEE: Bestimme jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$, und eine zur Randbedingung $u(0, t) = t^2$ und setze diese Lösungen glatt zusammen.

Mit der Charakteristikenmethode erhält man: $\frac{dx}{dt} = 2, \frac{du}{dt} = -u$

$$x(t) = 2t + C_1 \quad u(x(t), t) = C_2 e^{-t}$$

$$\implies C_1 = x - 2t, \quad C_2 = u e^t$$

$\Phi(x - 2t, u e^t) = 0$ liefert bei Auflösbarkeit

$$u = e^{-t} f(x - 2t).$$

Aus den Randwerten $u(0, t) = t^2$ erhält man

$$t^2 = e^{-t} f(0 - 2t)$$

oder mit $\mu = -2t$ bzw. $t = -\frac{\mu}{2}$

$$f(\mu) = \left(-\frac{\mu}{2}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{2}}$$

und damit erhält man für die Lösung

$$u_R(x, t) = e^{-t} f(x - 2t) = e^{-t} \left(-\frac{x - 2t}{2}\right)^2 e^{\frac{-(x-2t)}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{2t - x}{2}\right)^2$$

Setzt man dagegen in die allgemeine Lösung $u(x, t) = e^{-t} \tilde{f}(x - 2t)$

Die Anfangsdaten $u(x, 0) = 0$ ein, so erhält man:

Die Lösungen können entlang Kurven glatt zusammen gesetzt werde, auf denen $u = \tilde{u}$ gilt. Dies ist auf der Geraden $x = 2t$ der Fall. Man erhält also als Lösung des ursprünglichen Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{2t - x}{2} \right)^2 & x \leq 2t \\ 0 & x > 2t \end{cases}$$

Wobei noch zu prüfen wäre, ob die Lösung entlang der Geraden $x = 2t$ stetig (partiell-) differenzierbar ist.