Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 25
Juli 2025

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Vorbereitung auf die Klausur erleichtern. Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \ h(t)$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl: $\quad y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t},\ \gamma \in \mathbb{R}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl:
$y_p(t) := \gamma(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow{\text{Dgl}} \dot{\gamma}(t) \longrightarrow \gamma(t) \longrightarrow y_p(t)$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \gamma e^{-\alpha t} + y_p(t)$
γ über Anfangswert bestimmen!

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 6)

- polar $< - - - >$ kartesisch (Blatt 4P, 4H)

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4P)

Blatt 1:

P1: Ansatz für Lösung der Wärmeleitungsgleichung gegeben. Parameter durch einsetzen in Differentialgleichung bestimmen.

P2: Ansatz für Lösung der Telegraphengleichung gegeben. Parameter durch einsetzen in Differentialgleichung bestimmen.

H1: Definitionen, Ordnung, semi-, quasi-, linear etc.

H2: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung, Transportgleichung $u_t - cu_x = 0$

Blatt 2: Charakteristiken-Methode

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode Standard, AWA:

$$u_t + a(x,t,u)u_x = b(x,t,u)$$

P3: Erste nichtlineare Dgl , Fragen zu Charakteristiken:
Form der Charakteristik/ Wird der Raum ausgefüllt?

H2: Fragen zu Charakteristiken:
Form/ Lösung konstant auf Charakteristiken?

H3: Charakteristiken-Methode auf Viertelebene

Blatt 3:

P1: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen bzw. zwei Stoßwellen

P2: Erhaltungsgleichung, $u_t + \left(\frac{(u-2)^4}{2}\right)_x = 0$, $u(x,0)$ nicht stetig.
Sprungbedingung, Entropielösung.

P3: Kür. Irreversibilität nicht glatter Lösungen der Burgers Gleichung

H1a) Kurze Fragen zu: Entropielösung, schwache Lösung, Verdünnungswelle.

H1b) Entropielösung für andere Erhaltungsgleichung als Burgers.

H2) Burgers Gleichung: Verdünnungswelle neben Stoßwelle.

- Pflicht: Lösung bis zum Treffen der beiden.

- Kür: Lösung nach aufeinandertreffen der Verdünnungswelle und Stoßwelle.

H3) Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Blatt 4:

P1) Transformation auf integrierbare Form. Neue Dgl lösen.

P2a) Harmonische Funktionen.
P2b) Mittelwerteigenschaft.

P3) Rotationssymmetrische Lösungen der Laplace Gleichung. Fundamentallösungen

H1) Typ (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch) bestimmen.

H2) Mittelwerteigenschaft / Maximumprinzip / Eindeutigkeit der Lösung nutzen um Werte im einzelnen Punkt zu bestimmen.

Blatt 5:

P) ARWA: Inhomogene Wärmeleitung, inhomogene Randwerte

- Auf ARWA mit homogenen Randdaten reduzieren/transformieren.

- Homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
  $\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellungen
  $\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich.

- Inhomogene DGl, homogene Randwerte: geschlossene Lösungsdarstellungen
  $\longrightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichungen
  $\longrightarrow$ Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Dgl lösen.

- Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung : Superposition

H1) Laplace Gleichung in Kreisscheibe: Produktansatz.
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich.

H2) Wärmeleitungsgleichung,
Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen
Beispiel mit Koeffizientenvergleich lösen.

Blatt 6:

P1) AWA Wellengleichung, inhomogen,
Ansatz für Lösung der inhomogenen Dgl. gegeben
Homogene Differentialgleichung: d'Alembert
Zusammensetzen (Superposition).

P2) ARWA Wellengleichung, homogene Dgl. , homogene Randdaten
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich ($A_K = 0$) und Fourier-Koeffizienten für die A_k.

H1a) AWA Wellengleichung, homogene Dgl. : d'Alembert, Standard

H1b) AWA Wellengleichung, homogene Dgl., unstetige Daten: d'Alembert
Lösung für feste $t-$Werte skizzieren.

H2) ARWA Wellengleichung, homogene Dgl. , homogene Randdaten
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich ($B_K = 0$) und Fourier-Koeffizienten für die B_k.

H3) ARWA: Inhomogene Wellengleichung, inhomogene Randwerte

$\longrightarrow$ Auf ARWA mit homogenen Randdaten reduzieren/transformieren.

Zusammenstellung einiger
(nicht aller)
geschlossener Formeln

Ohne Gewähr!

Bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Formeln für Differentialgleichungen erster Ordnung:

Charakteristikenmethode

$$u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem : $U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \tag{1}$$

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $C_2 = f(C_1)$. Löse wenn möglich nach u auf

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t + (f(u))_x = 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{2}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Für (Riemann Problem)

$$u_t + (f(u))_x = 0, (f \text{ streng konvex}), \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$$

Entropielösung:

- Im Fall $u_l > u_r$: Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ mit:

  Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

  $$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

  $$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- Im Fall $u_l < u_r$: Verdünnungswelle.
  Mit $g = (f')^{-1}$ = inverse Funktion zu f'

  $$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + f'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln für **Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

In der Klausur:
Direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden! Nicht erst mit Produktansätzen arbeiten!

Es folgen Lösungsformeln für:

Wärmeleitungsgleichung Anfangsrandwertaufgabe

Wellengleichung Anfangswertaufgabe

Wellengleichung Anfangsrandwertaufgabe

Laplace-Gleichung: Rotationssymmetrisch

Laplace-Gleichung: Nicht rotationssymmetrisch

I) Wärmeleitungsgleichung, Anfangsrandwertaufgabe (ARWA), homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte

$$u_t - cu_{xx} = 0 \qquad c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in [0, L],$$

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich möglich

$$a_k = \frac{2}{L} \int_a^b u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx$$ $\longleftarrow$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

II) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0, c > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\sin(k\omega x) \qquad\qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Löse Anfangswertaufgaben

$$\dot{a}_k(t) \,+\, a_k(t)\,\frac{ck^2\pi^2}{L^2} \,=\, c_k(t), \quad a_k(0) = b_k$$

Wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\sin(k\omega x) \overset{!}{=} h(x,t)$$ evtl. Koeffizientenvergleich möglich

sonst:

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin(k\omega x)dx$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin(k\omega x) \overset{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich

sonst:

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin(k\omega x)dx$$

III) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\,u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$
$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Auf die Lösung von ARWA mit homogenen Randwerten reduzieren:

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Fall I).
Falls neue Dgl. inhomogen : Fall II).

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0,\ \tilde{u}(x,0) = g(x),\ \tilde{u}_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R},\ c > 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,[g(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\alpha)\,d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t),\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R},\ c > 0$

$$u(x,t) = \tilde{u} + \hat{u} \qquad (\tilde{u} \text{ wie in A})$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} f(\omega,\tau)\,d\omega\,d\tau$$

B) ARWA, homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0,\ c > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \omega := \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ck\omega t) \;+\; B_k \sin(ck\omega t)\right] \sin(k\omega x)$$

Eventuell Koeffizientenvergleich

$$u(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

$$u_t(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} ck\omega \cdot B_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} w_0(x)$$

möglich. Sonst:

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\alpha)\sin(k\omega\alpha)\,d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^L w_0(\alpha)\sin(k\omega\alpha)\,d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{1}{ck\omega} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L w_0(\alpha)\sin(k\omega\alpha)\,d\alpha,$

C) **Inhomogene** Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Löse: $q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

D) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Auf die Lösung von ARWA mit homogenen Randwerten reduzieren:

$$w(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für w mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogene Wellengleichung : Fall B)
Falls neue Dgl. inhomogene Wellengleichung : Fall C)

Laplace-Gleichung

A) Rotationssymmetrisch

Jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ lässt sich mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\phi(\boldsymbol{x}) + c, \qquad a,\, c \in \mathbb{R}$$

darstellen.

Für $n = 2:$ $\qquad \phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\| \binom{x}{y} \|_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

für $n = 3:$ $\qquad \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \|(x, y, z)\|_2^{-1} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

a und c werden mit HIlfe der Randdaten berechnet.

B) Nicht rotationssymmetrisch auf Ringen, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben

Laplace Operator in Polarkoordinaten: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$.

$$\boxed{\Delta u = 0 \overset{r \neq 0}{\iff} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0\,.}$$

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0\ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden.

Vorgehensweise auf dem Außenraum:

$\Delta\, u = \ 0 \qquad$ für $(x^2 + y^2 =)\, r^2 > R^2 \qquad$ und $u(R, \phi) = u_0(\phi)$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k$.

Es bleibt: $u(r, \phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\, (a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung $u(R, \phi) = u_0(\phi)$.

Man erhält die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \, (A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi))$$

mit den Fourierkoeffizienten von u_0

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi) \, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi) \, d\phi$$

Vorgehensweise im Innenraum:

$\Delta\, u = 0$ für $(x^2 + y^2 =)\, r^2 < R^2$ und $u(R, \phi) = u_0(\phi)$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_0 = 0, c_k = 0\,, \quad \forall k$.

Es bleibt: $u(r, \phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^k\, (a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung $u(R, \phi) = u_0(\phi)$.

Man erhält die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \,(A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi))$$

mit den Fourierkoeffizienten von u_0

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi) \, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi) \, d\phi$$