Fachbereich Mathematik **SoSe 2025**

Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Differentialgleichungen II

27. August 2025

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: [7 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + (2t+1)\,u_x = -ut\,, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = \sin(2x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = 2t+1 \implies dx = (2t+1)dt \implies x = t^2+t+ C$ **[1 Punkt]**

$$\frac{du}{dt} = -ut \implies \frac{du}{u} = -tdt \implies \ln(|u|) = -\frac{t^2}{2} + \tilde{D}$$
$$\implies |u| = \pm e^{-\frac{t^2}{2}+\tilde{D}} \implies u = De^{-\frac{t^2}{2}}$$ **[1 Punkt]**

Mit $C = x - t^2 - t$ und $D = ue^{\frac{t^2}{2}}$ machen wir den

Ansatz $D = f(C)$

und erhalten

$ue^{\frac{t^2}{2}} = f(x - t^2 - t)$ **[2 Punkte]**

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} f(x - t^2 - t)$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = e^{-\frac{0^2}{2}} f(x - 0^2 - 0) = f(x) \stackrel{!}{=} \sin(2x)\,.$] **[1 Punkt]**

Die Lösung der AWA ist

$u(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(2x - 2t^2 - 2t)$.] **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Bestimmen Sie die Entropielösung der Anfangswertaufgabe

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion

$$f(u) = \left(\frac{u-1}{3}\right)^2$$

und den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -1 & 0 < x. \end{cases}$$

Hinweis: Gefragt ist nur die Lösung für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Lösung: Die Anfangsdaten würden bei Lösung über die Charakteristikenmethode für jedes $t > 0$ eine Mehrdeutigkeit ergeben. Es muss mit $u_l = 2$ und $u_r = -1$ eine Stoßfront $s(t)$ eingeführt werden. **[1 Punkt]**

Mit $f(u_l) = \left(\frac{2-1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\quad f(u_r) = \left(\frac{-1-1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **[1 Punkt]**

erhalten wir

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{4}{9}}{2 - (-1)} = -\frac{1}{9}$$ **[1 Punkt]**

und damit

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 2 & x \leq s(t) = -\frac{t}{9} \\ u_r = -1 & -\frac{t}{9} < x. \end{cases}$$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 3: [2 Punkte]

Sei $u(x, y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{in } \Omega := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \, 0 < x < 20, \, 0 < y < 25 \right\}, \\ u(x, y) &= 10, \qquad \text{auf } \partial\Omega \, . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung u ohne Rechnung aber mit Begründung.

Lösung:

Da die harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ihr Minimum und Maximum auf dem Rand annimmt und hier konstant gleich 10 ist, ist die Lösung

$$u(x, y) = 10 \qquad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Alternative lösung: Die konstante Funktion $u(x, y) = 10$ löst die Laplace Gleichung auf dem ganzen Rechteck Ω und erfüllt die Randbedingung. Da die Lösung eindeutig ist, erhalten wir

$$u(x, y) = 10 \qquad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Aufgabe 4: [7 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \frac{x}{\pi}\cos(t) && \text{für } x \in (0,\pi), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + 2\Big(\sin(x) \, - \, \sin(3x)\Big) && \text{für } x \in [0,\pi], \\ u(0,t) &= 1, && \text{für } t > 0, \\ u(\pi,t) &= \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe durch die Einführung einer geeigneten Funktion v in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen für v.

Geben Sie die Differentialgleichung für v und die Anfangsbedingung für v an.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,\pi), t > 0, \\ v(x,0) &= 2\sin(x) \, - \, 2\sin(3x) && \text{für } x \in [0,\pi], \\ v(0,t) &= 0, \quad v(\pi,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Überführung in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen:

$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{\pi}(\sin(t) - 1) =$

oder

$u(x,t) = v(x,t) + 1 + \frac{x}{\pi}(\sin(t) - 1)\,.$ **[1 Punkt]**

Dann gilt:

$u_t = v_t + \frac{x}{\pi}\cos(t), \qquad v_{xx} = u_{xx}$

Neue DGL: $v_t + \frac{x}{\pi}\cos(t) - v_{xx} = \frac{x}{\pi}\cos(t) \Longleftrightarrow$

$\boxed{v_t - v_{xx} = 0}$ **[1 Punkt]**

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - 1 - \frac{x}{\pi}(\sin(t) - 1) \\ &= 1 - \frac{x}{\pi} + 2\Big(\sin(x) \, - \, \sin(3x)\Big) - 1 + \frac{x}{\pi} \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$\boxed{v(x,0) = 2\sin(x) \, - \, 2\sin(3x)}$ **[1 Punkt]**

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(\pi,t) = 0}$

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{\pi} = 1$ und $c = 1$ gilt:

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t}\,\sin(k\omega x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t}\,\sin(kx) \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \;\overset{!}{=}\; 2\sin(x) \;-\; 2\sin(3x)$$

$$\Longrightarrow\; a_1 = 2,\; a_3 = -2,\; a_k = 0 \qquad \forall k \notin \{1,3\}.$$

$$v(x,t) \;=\; 2\,e^{-t}\,\sin(x) \;-2\,e^{-9t}\,\sin(3x) \qquad [\textbf{2 Punkte}]$$

c) Für die Lösung von a) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \; v(x,t) + \;1 + \;\frac{x}{\pi}(\sin(t) - 1) \\ &= \; 2\,e^{-t}\,\sin(x) \;-2\,e^{-9t}\,\sin(3x) \;+\; 1 + \;\frac{x}{\pi}(\sin(t) - 1)\,. \qquad [\textbf{1Punkt}] \end{aligned}$$